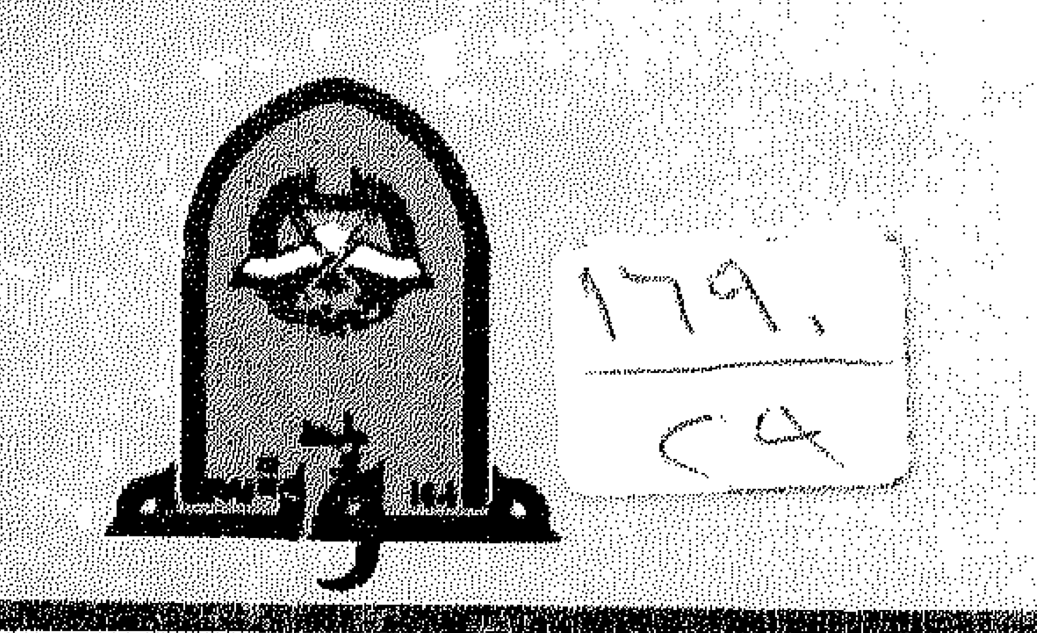
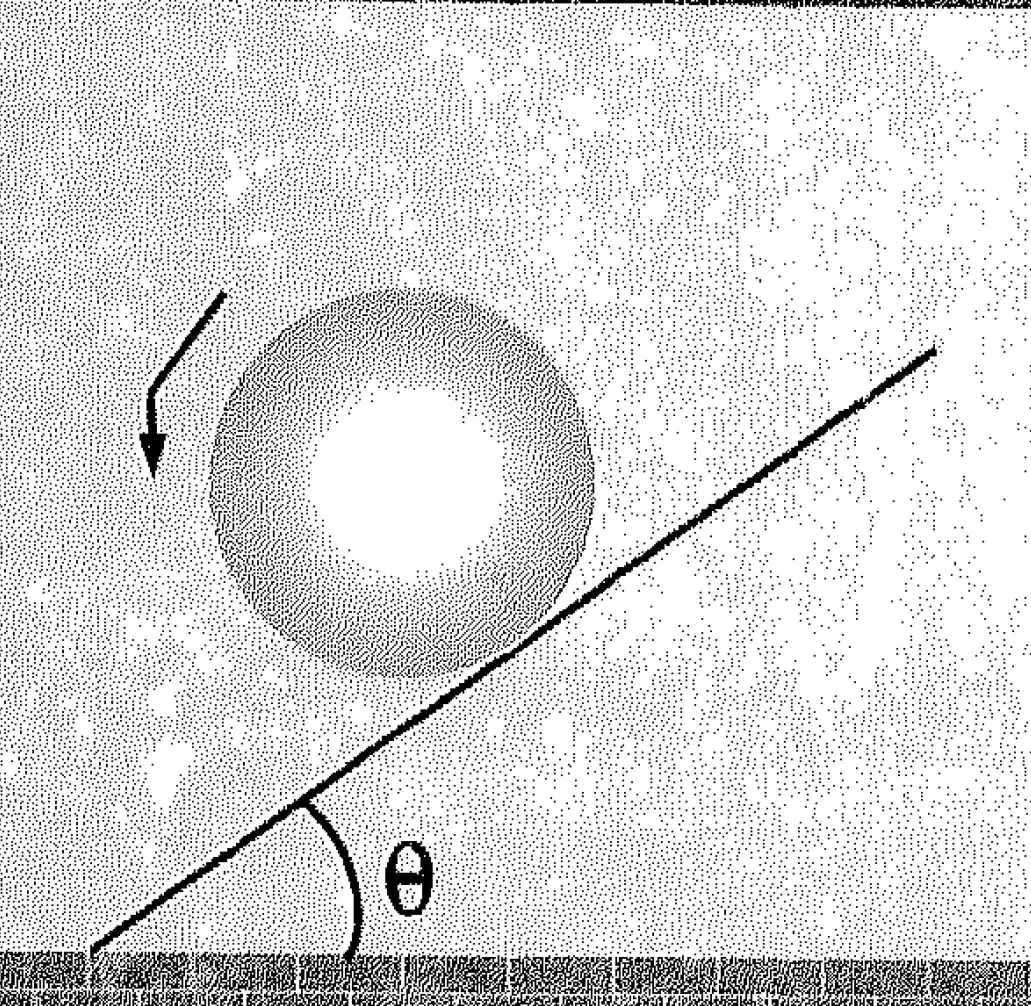
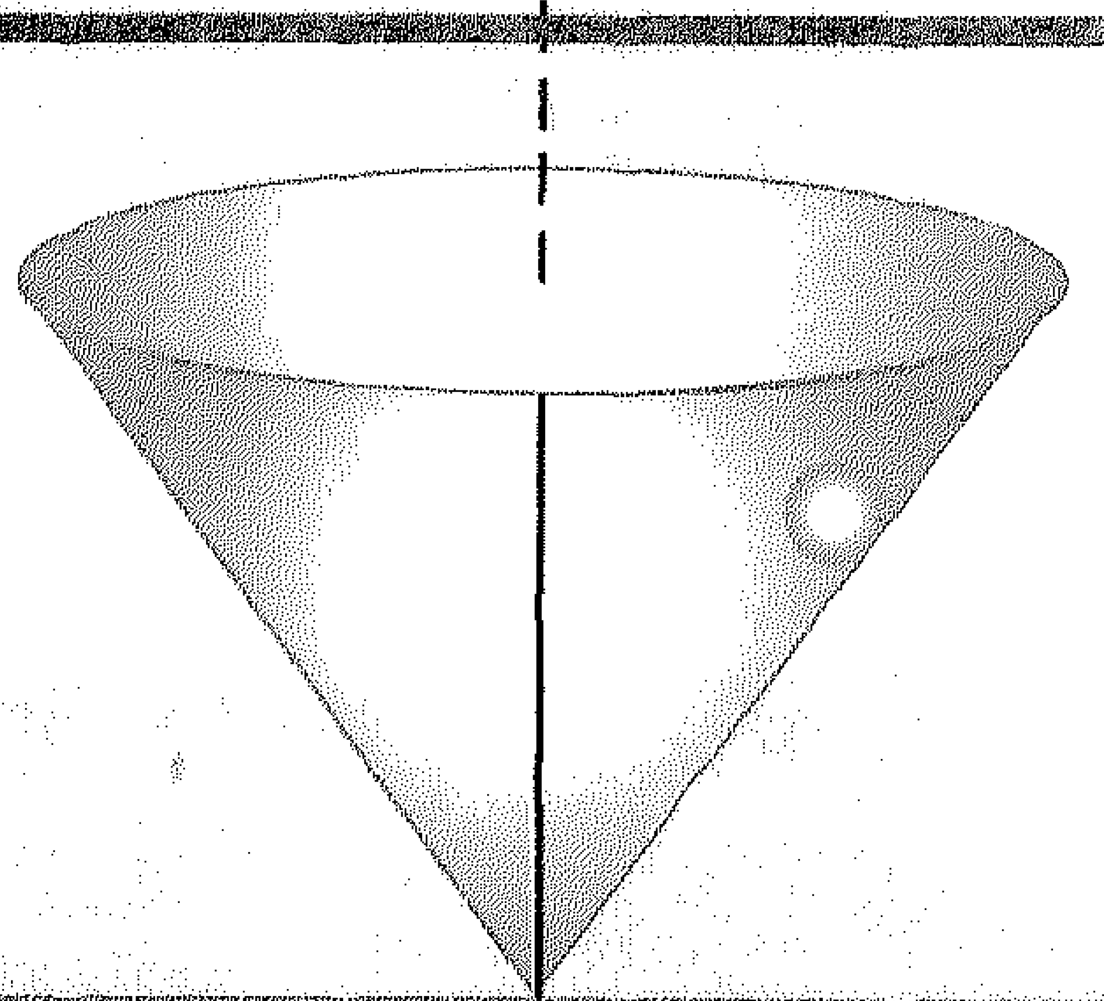
عمادة البحث العلمي والدراسات العليا
منشورات جامعة مؤتة
(٤٩)







$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

مقدمة في
ميكانيكا لاجرانج وهاميلتون

تأليف

د . عقاب ربيع   د . حسين العمري

محمود حسن أبو خرمة

قسم الفيزياء - كلية العلوم
جامعة مؤتة - الكرك -الأردن

مقدمة في
ميكانيكا لاجرانج وهاميلتون

الطبعة الأولى

١٤١٨هـ - ١٩٩٨م

****

رقم التصنيف : ١ر٥٣١

المؤلف ومن هو في حكمه : عقاب ربيع، حسين العمري، محمود حسن ابو خرمة

عنوان الكتاب : مقدمة في ميكانيكا لا جرانج وهاميلتون

الموضوع الرئيسي : ١- العلوم النظرية.

: ٢- الميكانيكا - الفيزياء

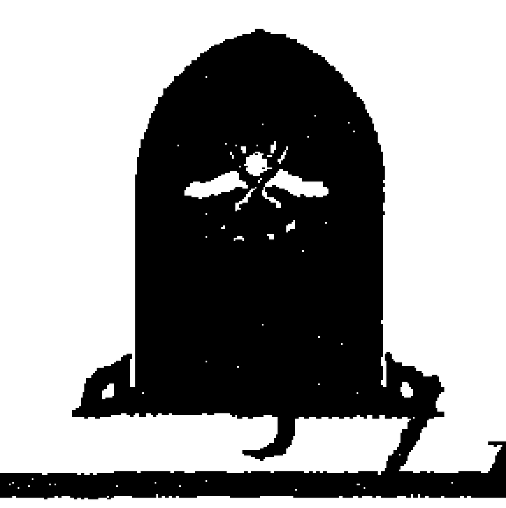
رقم الإيداع : (١٣/١/١٩٩٨)

بيانات النشر : عمان: الشركة الجديدة

• تم إعداد بيانات الفهرسة الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

رقم الإجازة المتسلسل لدى دائرة المطبوعات والنشر(٩/١/١٩٩٨)

عمادة البحث العلمي والدراسات العليا
منشورات جامعة مؤتة



مقدمة في
ميكانيكا لاجرانج وهاميلتون

تأليف

د . عقاب ربيع   د . حسين العمري

محمود حسن أبو خرمة

قسم الفيزياء - كلية العلوم
جامعة مؤتة - الكرك -الأردن

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ يدبر الأمر من السماء إلى الأرض ثُمَّ يعرج إليه في يوم كان مقداره ألف سنة مما تعدون ﴾

صدق الله العظيم

[السجدة : ٥]

المقدمة

يسرنا أن نضع بين أيدي أعزائنا طلبة الفيزياء لمرحلة البكالوريوس و الماجستير باكورة إنتاجنا العلمي في الميكانيكا الكلاسيكية ، ليكون لهم عونا في فهم هذا الموضوع بسهولة ويسر .

إنّ هذا الجهد المتواضع ، سيكون بالإضافة لجهود من سبقونا ، رافدا للمكتبة العربية بكتاب علمي متخصص مكتوب بلغة القرآن التي نعتز بها كثيرا ، فنكون بذلك قد أدينا جزءا من الواجب الملقى على كواهلنا للكتابة بلغة العرب لما في ذلك من حاجة ماسة و ملحة في وطننا العربي الكبير .

لقد تضمن هذا الكتاب ستة فصول دراسية : الأول ، يحوي مراجعة سريعة لميكانيكا نيوتن ، و الحركة الإهتزازية البسيطة ، ويحتوي الفصلان الثاني والثالث : عرضا لمعادلات لاجرانج و هاميلتون بشكل مبسط جدا ؛ لذلك أوردنا عددا من الإشتقاقات المطولة ، و عدداً لابأس به من الأمثلة المحلولة ؛ و ذلك إسهاماً منا لحل المشاكل التي يعاني منها طلاب الفيزياء عند دراستهم لهذا الموضوع . وأما الفصل الرابع : فيحوى عرضا لحسبان التغاير ، و الفصل الخامس : تضمن الاهتزازات الصغيرة التي عولجت باستخدام معادلات لاجرانج . و تمّ استخدام المصفوفات لايجاد الحلول العامة و الترددات الطبيعية . أمّا الفصل السادس و الأخير : فقد تناول شرحا وافيا للانتقالات الفيصلية (القانونية) . إنّ كل فصل من هذه الفصول يتضمّن العديد من الأمثلة المحلولة ، وفي نهاية كل فصل وضعت مجموعة من الأسئلة المنتقاة مزودة بحلول جزئية .

و ختاما لايسعنا إلا أن نقدم الشكر الجزيل لجامعة مؤتة لدعمها لهذا الكتاب ، و المحكمين الذين قاموا بتحكيم هذا الكتاب على ملاحظاتهم القيمة وتشجيعهم على نشر هذا الكتاب ، كما ونشكر الزميل الدكتور يوسف القماز من قسم اللغة العربية في جامعة مؤتة لمراجعته لهذا الكتاب من الناحية اللغوية .

المؤلفون

22 شوال 1416هـ

12 آذار 1996 م

محتويات الكتاب

الصفحة

الفصل الأول

مقدمة في ميكانيكا نيوتن

Introduction to Newtonian Mechanics

1.0* المقدمة

سنعرض ميكانيكية حركة الأجسام بالاعتماد على قوانين نيوتن للحركة ، وفي فصول لاحقة ستتم دراسة هذا الموضوع باستخدام معادلات لاجرانج و هاميلتون الأكثر تطورا ، حيث أنّ هذه المعادلات تمكننا من حل المسائل الأكثر صعوبة و ذلك لأنها تتعامل مع كميات عددية (قياسية) ، وهي ليست نظريات مختلفة ، و انما معادلات مشتقة من قوانين نيوتن للحركة . إنّ قوانين نيوتن في الحركة هي :

1) القانون الأول : كل جسم ساكن أو متحرك حركة منتظمة في خط مستقيم يحافظ على حالته مالم تؤثر عليه قوة خارجية .

2) القانون الثاني : معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن (التسارع) يتناسب طرديا مع القوة المؤثرة و يكون باتجاهها .

3) القانون الثالث : لكل فعل رد فعل مساوٍ له في المقدار و معاكسٍ له في الاتجاه ، فإذا أثّر جسمان على بعضهما فإنّ القوتين المتبادلتين بين الجسمين هما قوتا فعل و رد فعل لهما نفس المقدار و تتضادّان في الاتجاه .

و فيما يلي دراسة مفصّلة لهذه القوانين .

1.1* قانون نيوتن الأول ، و نظم محاور الإسناد القاصرة

Newton's First Law and Inertial Frame Reference Systems

إن قانون نيوتن الأول ، و الذي يسمى أحيانا بقانون القصور (Law of Inertia) ؛ لأنّه يصف لنا خاصية مشتركة لجميع المواد . وهي : خاصية القصور أي : (العجز عن تغيير الحالة بدون مؤثر خارجي) يعرِّف لنا نظاما خاصا من المحاور و هو نظام محاور الإسناد القاصرة (Inertial Frames of Reference) الذي ينطبق فيه قانون نيوتن الاول . إنّ من الصعب الحصول على محاور إسناد قاصرة ؛ لأن كل ما في الكون في حركة دائبة " **و كل في فلك يسبحون** " ، فالأرض ليست محور إسناد قاصر بسبب حركتها الدورانية حول الشمس و حول محورها ، ومع ذلك يمكن اعتبار الأرض محور إسناد قاصر للأغراض العملية التي لا تتطلب دقة عالية ، ولمزيد من الدقة فإن المحور الملتصق بمركز الشمس أكثر قصورا ، و لكون الشمس متحركة " **و**

الشمس تجري لمستقر لها " ، فإنّه من البديهي أن ننشد محورا قاصرا بالنسبة لمركز المادّة الموجودة في الكون .

و من التطبيقات العملية الواضحة على قانون القصور : إندفاع راكب السيارة للأمام عند التوقف المفاجيء ، واندفاعه للخلف عند تحرك السيارة للأمام ؛ يحصل ذلك لأن الجسم قاصر عن تغيير حالته من الحركة إلى السكون في الوضع الأول ، وقاصر كذلك عن تغييرحالته من السكون إلى الحركة في الوضع الثاني .

1.2* الكتلة والقوة (قانونا نيوتن الثاني و الثالث)
Mass and Force , Newton's second and third Laws

عند تحريك أو إيقاف جسم فإنه يلزم لذلك قوة تتناسب طرديا مع كتلة الجسم أو قصوره ، فلو فرضنا أن جسمين A و B مرتبطان معا بواسطة زنبرك مضغوط ، ثم تركا ليتحرّكا مبتعدين عن بعضهما البعض بفعل القوة الناجمة عن طاقة الوضع المخزونة في الزنبرك ، فإنّنا نلاحظ أنّ تسارع كل من الجسمين في إتجاه معاكس لإتجاه تسارع الاخر ، و النسبة بين تسارعيهما ثابتة ، كما توضح العلاقة التالية :

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = -\mu_{BA}\frac{d\vec{v}_B}{dt} \qquad (1.1)$$

حيث :

$$\mu_{BA} = \frac{1}{\mu_{AB}} = \frac{m_B}{m_A} \qquad (1.2)$$

هنا : m_A و m_B عبارة عن كتلة قصور الجسمين A و B على الترتيب . النسبة μ_{BA} يجب أن لاتعتمد على وحدة قياس الكتلة ، وهذا الشرط يتحقق إذا كانت

$$\mu_{BA} = \frac{\mu_{BC}}{\mu_{AC}} \qquad (1.3)$$

حيث c : أي جسم ثالث كتلته m_C . و قد ثبت عمليًا أن هذا الشرط صحيح . إنّ النسبة بين كُتل القصور لجسمين تساوي نسبة قوى الجذب التي تؤثر بها الأرض على الجسمين . وإذا كانت الكتل ثابتة فإن العلاقة (1.1) تصبح

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = -\frac{m_B}{m_A}\frac{d\vec{v}_B}{dt} \qquad (1.4)$$

و بضرب طرفي المعادلة بالكتلة m_A نحصل على :

$$\frac{d(m_A \vec{v}_A)}{dt} = -\frac{d(m_B \vec{v}_B)}{dt} \qquad (1.5)$$

المعادلة (1.5) تمثل معدل التغير في كمية التحرك أو الزخم الخطي (Linear Momentum) الذي يتناسب مع القوة . إذن نستطيع كتابة القوة $\vec{F}$ المؤثرة على جسم كتلته m و سرعته $\vec{v}$ على النحو :

$$\vec{F} = k \frac{d m \vec{v}}{dt} \qquad (1.6)$$

حيث k ثابت التناسب بين القوة و معدل تغير الزخم الناجم عنها . و عندما تكون الكتلة ثابتة ، فإنّ المعادلة (1.6) يمكن كتابتها على الصورة :

$$\vec{F} = k m \frac{d \vec{v}}{dt} = k m \vec{a} \qquad (1.7)$$

و بذلك نستطيع كتابة المعادلة (1.5) كما يلي :

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B \qquad (1.8)$$

وهذه النتيجة ، هي قانون نيوتن الثالث للقوى المتبادلة بين الكتلتين m_A و m_B

1.3 * كمية التحرك الخطية أو الزخم الخطي (Linear Momentum)

إن الزخم الخطي $\vec{P}$ لجسم كتلته m و يتحرك بسرعة $\vec{v}$ يساوي حاصل ضرب الكتلة في سرعته المتجهة ، أي أنّ :

$$\vec{P} = m \vec{v} \qquad (1.9)$$

و يمكن إيجاد العلاقة التي تربط الزخم الخطي للجسم و القوة المؤثرة عليه كما يلي :

$$\vec{F} = \frac{d \vec{P}}{dt} = \frac{d m \vec{v}}{dt} \qquad (1.10)$$

و عندما تكون الكتلته m ثابتة ، فإنّ القوة تصبح:

$$\vec{F} = m \frac{d \vec{v}}{dt} = m \vec{a} \qquad (1.11)$$

وهذا يعني أن معدل التغير الزمني لكمية الزخم الخطي لجسم ، تساوي محصلة القوى المؤثرة على هذا الجسم ، وكذلك يمكن ربط الزخم الخطي بقانون نيوتن الثالث (قانون الفعل و رد الفعل) . و يمكن توضيح هذه العلاقة كما يلي : A و B جسمان ، القوة المتبادلة بينهما تحقق المعادلتين

$$\vec{F}_{AB}=\frac{d\vec{P}_A}{dt},\quad \vec{F}_{BA}=\frac{d\vec{P}_B}{dt} \tag{1.12}$$

حيث $\vec{F}_{BA}$ هي القوة التي يؤثر بها الجسم A على الجسم B ، و $\vec{F}_{AB}$ هي القوة التي يؤثر بها الجسم B على الجسم A .

ينصّ قانون نيوتن الثالث على أنّ :

$$\vec{F}_{AB}=-\vec{F}_{BA} \tag{1.13}$$

وباستخدام العلاقة التي تربط بين الزخم الخطي و القوة نجد أنّ :

$$\frac{d\vec{P}_A}{dt}=-\frac{d\vec{P}_B}{dt} \tag{1.14}$$

وبنقل الطرف الأيمن إلى الجهة اليسرى نحصل على :

$$\frac{d(\vec{P}_A+\vec{P}_B)}{dt}=0 \tag{1.15}$$

إذن

$$\vec{P}_A+\vec{P}_B=\vec{c} \tag{1.16}$$

العلاقة (1.16) تبيّن أ ن مجموع الزخم الخطي لجسمين متفاعلين ضمن نظام معزول يساوي كمية ثابتة $\vec{c}$ ، وهذا نص قانون حفظ الزخم الخطي (أي أنّ مجموع الزخم الخطي لأي نظام معزول يبقى ثابتا مع الزمن) .

1.4 * الحركة المستقيمة لجسيم بفعل تأثير قوة ثابتة
One-Dimensional Motion of a Particle Under a Constant Force

عندما تؤثر أكثر من قوة على جسيم كتلته m ، فإنّ هذه القُوى تُجمع اتجاهيا . و باستخدام قانون نيوتن الثاني ، فإنّ معادلة الحركة لهذا الجسيم تأخذ الصيغة التالية :

$$\vec{F}_{net}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=m\vec{a} \tag{1.17}$$

حيث : $\vec{a}$ تسارع الجسيم ، m كتلته ، $\vec{r}$ متجه الموقع لهُ ، و $\vec{F}_{net}$ محصلة القوى المؤثّرة عليه .

عند معرفة الشروط الابتدائية لحركة مجموعة من الجسيمات ، فإنّه يمكننا من خلال قانون نيوتن الثاني للحركة معرفة السرعة و الموقع لها عند أيّ لحظة زمنيّة . إلا أن هناك بعض المسائل المعقدة و التي يحتاج حلّها إلى استخدام أجهزة الحاسوب ، كحركة الصواريخ و حركة الأقمار الصناعية . وفي الحالات الّتي يكون فيها عدد الجسيمات كبيراً جدّا (غاز مثلا) ، فإنّ أجهزة الحاسوب

كذلك تعجز عن حلّ معادلات الحركة . في هذه الحالات يأتي دور الميكانيك الإحصائي . سنقتصر في هذا الكتاب على دراسة الحالات التي يمكن حلها بدون الحاجة لاستخدام الحاسوب ، فضلاً عن اللجوء لاستخدام الميكانيك الإحصائي .

1.5 * الحركة الخطية ، التسارع المنتظم
Rectilinear Motion, Uniform Acceleration

عندما يتحرك جسيم في خط مستقيم فإنّنا نطلق على هذه الحركة إسم الحركة الخطية (Rectilinear Motion) . من الممكن اختيار البعد x اتّجاها لهذه الحركة ، فتكون معادلة الحركة على النحو التالي :

$$F = F_x(x, \dot{x}, t) = m\ddot{x} \qquad (1.18)$$

حيث : $\dot{x}$ و $\ddot{x}$ سرعة و تسارع الجسيم على الترتيب . و من أبسط الأمثلة ، حالة القوة الثابتة ، حيث يكون التسارع ثابتا و يعطى بالعلاقة :

$$a \equiv \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \qquad (1.19)$$

و للحصول على دالة السرعة v ، فإننا نكامل التسارع بالنسبة للزمن :

$$\int_{v_0}^{v} dv' = \int_0^t a\, dt' \qquad (1.20)$$

فتكون النتيجة :

$$\dot{x} \equiv v = at + v_0 \qquad (1.21)$$

حيث : v_0 السرعة الابتدائية عند الزمن صفر . و للحصول على دالة الموقع للجسيم بدلالة الزمن فإنّنا نكامل السرعة بالنسبة للزمن :

$$\int_{x_0}^{x} dx' = \int_0^t (at' + v_0)\, dt' \qquad (1.22)$$

فتكون النتيجة :

$$x = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_0 \qquad (1.23)$$

حيث : x_0 الإزاحة الابتدائية عند الزمن $t = 0$. من المعادلة (1.21) نجد الزمن بدلالة السرعة و التسارع :

$$t = \frac{v - v_0}{a} \qquad (1.24)$$

و بتعويض قيمة الزمن في المعادلة (1.23) نحصل على :

$$x = \frac{a}{2}\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + x_0 \qquad (1.25)$$

و منها فإنّ :

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2 \qquad (1.26)$$

والعلاقات (1.21) ، (1.23) و (1.26) تمثل معادلات الحركة بتسارع منتظم . و من تطبيقاتها المهمة : حركة الجسم الساقط سقوطا حرا قرب سطح الأرض (في حالة إهمال مقاومة الهواء) ، حيث يمكن اعتبار تسارعه تقريبا ثابتا : $g = 9.8\ m/s^2$. والقوة المؤثرة هي الوزن mg . و كذلك حركة المقذوفات بالقرب من الأرض .

مثال (1.1)

جسم كتلته m ينزلق على سطح مائل أملس زاوية ميله عن الأفق θ . جد معادلة الحركة له ؟ ثم جد معادلة حركته إذا كان السطح خشنا و معامل إحتكاكه الحركي μ (Coefficient of Kinetic Friction) ؟

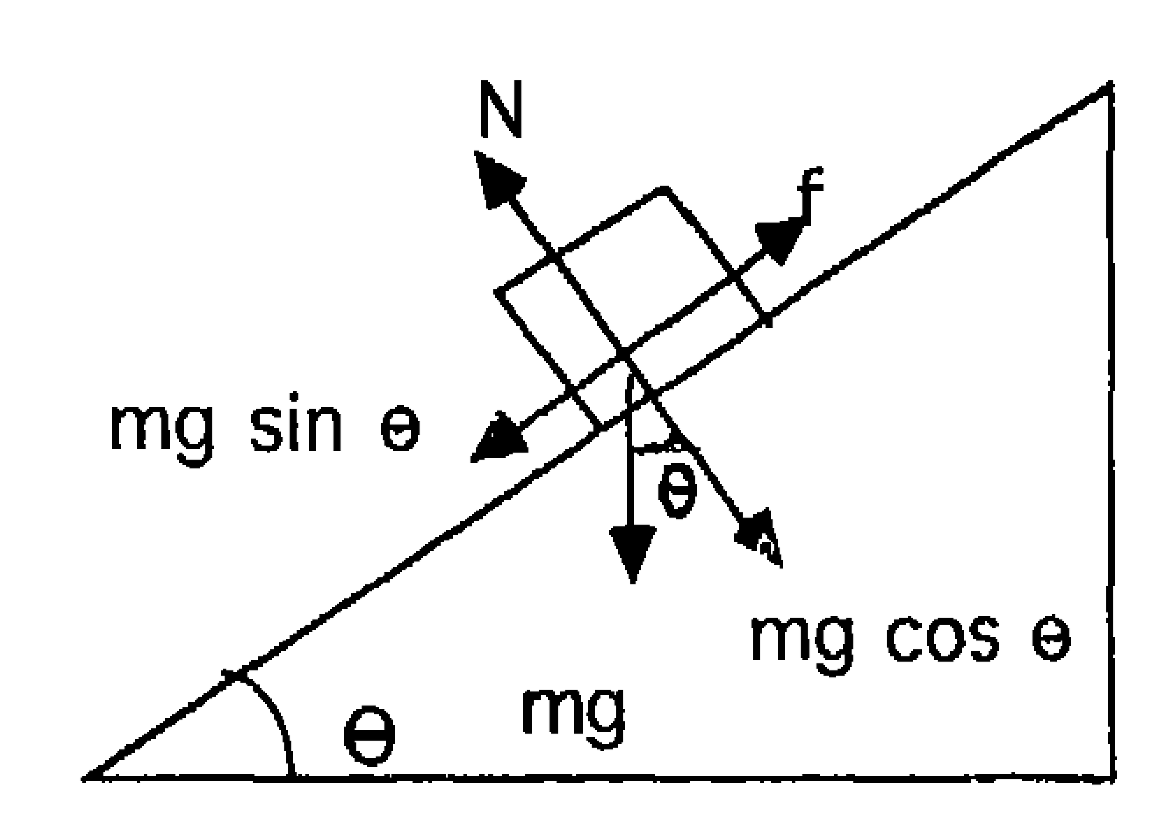
الحل :

يوضح الشكل (1.1) أنّ x تمثّل الإزاحة في البعد الموازي للسطح المائل ؛ لذا تكون معادلة الحركة للجسم إذا كان السطح أملس :

$$\ddot{x} = \frac{F_x}{m} = g \sin\theta$$

أمّا إذا كان السطح خشنا ، فإنّ قوة رد فعل السطح على الجسم هي $N = mg\cos\theta$ ، و بناءً على ذلك ، فإنّ قوّة الاحتكاك بين السطح و الجسم هي : $f = \mu N = \mu\, mg\cos\theta$ ، و محصلة مركبة الوزن و قوة الاحتكاك المؤثرتين على الجسم في البعد x هي : $F_x = mg\sin\theta - \mu\, mg\cos\theta$ ، وباستخدام قانون نيوتن الثاني للحركة نجد تسارع الجسم :

$$\ddot{x} = \frac{F_x}{m} = \frac{mg\sin\theta - \mu\, mg\cos\theta}{m} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$



الشكل (1.1) : رسم توضيحي يبين القوى المؤثرة على الجسم المنزلق على السطح المائل .

إنّ مقدار السرعة سيزداد إذاكانت القوة المحصلة في معادلة الحركة موجبة ، أو $\theta \geq \tan^{-1}\mu$ ، المقدار $\tan^{-1}\mu$ هو زاوية الاحتكاك الحركي ، و يرمز لها بالرمز ε .

1) إذا كانت θ = ε فإنّ $\ddot{x} = 0,\ \mu = \mu_s = \tan\theta$ ، و عندها ينزلق الجسم للاسفل بسرعة ثابتة . هنا μ_s تمثل معامل الإحتكاك السكوني (Coefficient of

. (Static Friction

2) إذا كانت $\theta < \varepsilon$ ، فإنّ الجسم سيسكن لأنّ القوة غير كافية لتحريكه .

3) وفي حالة الحركة للأعلى يكون التسارع سالبا وقيمته هي :

$$\ddot{x} = -g(\sin\theta + \mu\cos\theta)$$

1.6* القوى المعتمدة على الموضع وقانون حفظ الطاقة
(Forces that Depend on Position and Conservation Law Energy)

إنّ القوة المؤثرة على جسيم قد تعتمد على موقعه بالنسبة لجسيمات أخرى . ومثال ذلك : القوى الكهروستاتيكية ، قوى الجاذبية ، قوى الشد ، الضغط ، و المرونة ، و إذا كانت القوة لا تعتمد على الزمن أو السرعة ، فإنّ المعادلة التفاضلية للحركة :

$$F(x) = m\ddot{x} \tag{1.27}$$

و يمكن حل هذا النوع من المعادلات التفاضلية بطرق مختلفة ، إحدى هذه الطرق هي قاعدة السلسلة (Chain Rule) ، فنكتب التسارع على الشكل التالي :

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \tag{1.28}$$

و بذلك يمكن كتابة المعادلة التفاضلية للحركة على الصيغة :

$$F(x) = mv\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{m}{2}v^2\right) = \frac{dT}{dx} \tag{1.29}$$

حيث T الطاقة الحركية للجسم و تساوي $\frac{m}{2}v^2$ ، و بإجراءعملية التكامل لمعادلة الحركة :

$$dT = F\,dx \tag{1.30}$$

نحصل على :

$$\int_{T_0}^{T} dT = \int_{x_0}^{x} F\,dx' \tag{1.31}$$

$$T - T_0 = \int_{x_0}^{x} F(x')\,dx' = W \tag{1.32}$$

أي أنّ الشغل W يساوي التغير في الطاقة الحركية ($T - T_0$) ، وهذا القانون يُعرف بمُبرهنة الشغل الطاقة (Work Energy Theorem) ، و بشكل عام - إذا كانت حركة الجسيم في الأبعاد الثلاثة - يكون الشغل :

$$W = \int_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1 \tag{1.33}$$

حيث : v_1 سرعة الجسيم الابتدائية ، و T_1 طاقته الحركية قبل أن تؤثر عليه القوة ، و v_2 و T_2 هما سرعة الجسيم و طاقته الحركية (على الترتيب) بعد حركته على

المسار بفعل تأثير القوة عليه . يمكن تعريف طاقة الوضع $V(x)$ للجسيم من خلال المعادلة :

$$F(x) \equiv -\frac{dV(x)}{dx} \qquad (1.34)$$

أي أنّ القوة المؤثرة على الجسيم تساوي سالب التدرج لطاقة الوضع . و بإجراء عملية التكامل

$$\int_{x_0}^{x} F(x')\,dx' = -\int_{x_0}^{x} dV = -V(x) + V(x_0) = T - T_0 \qquad (1.35)$$

أي أنّ الشغل يساوي التغير في طاقة الحركة ، و يساوي سالب التغير في طاقة الوضع .

و من المعادلة الأخيرة نستنتج أن مجموع طاقة الحركة وطاقة الوضع يساوي مقدارا ثابتا .

$$V(x) + T = V(x_0) + T_0 = E \qquad (1.36)$$

حيث : E الطاقة الميكانيكية الكلية للجسيم . و بشكل عام فإنّ :

$$V(x) + \frac{m}{2}(v^2) = E \qquad (1.37)$$

و هذه علاقة صحيحة لأي نظام محافظ يخلو من قوى مقاومة تستهلك طاقة النظام ، و نستطيع استخراج سرعة الجسيم بدلالة الطاقة الكلية ، و طاقة الوضع من المعادلة السابقة ، فنجد :

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]} \qquad (1.38)$$

و عند مكاملة العلاقة (1.38) نحصل على دالّة موقع الجسيم بدلالة الزمن على النحو التالي :

$$\int_{t_0}^{t} dt' = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{+\sqrt{\left[E - V(x')\right]}} \qquad (1.39)$$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x')\right]}} \qquad (1.40)$$

من المعادلة (1.38) نستنتج أن السرعة حقيقية (كما هو مفترض) لقيم x الّتي تجعل $V(x)$ أقل من أو مساوية للطاقة الكلية E . وهذا يعني أن حركة الجسيم محدودة و محصورة ضمن قيم x التي تحقق الشرط $V(x) \le E$ ، ويكون الجسيم في حالة سكون لحظي (السرعة صفر) عندما $V(x) = E$ و هذا يعني أنّ الجسيم سيعكس اتجاه حركته عند هذه اللحظة ، و تدعى هذه النقاط التي ينعكس عندها اتجاه الحركة بنقاط الرجوع (Turning Points) .

مثال (1.2)

سقط جسم سقوطا حرا من ارتفاع x_0 . جد طاقة الوضع ، والطاقة الكلية له ، و سرعته عند وصوله سطح الأرض ؟

الحل :

نختار اتجاه الحركة للأعلى موجبا وللأسفل سالبا ؛ لذلك تكون قوة جذب الأرض سالبة :

$$-\frac{dV(x)}{dx} = -m\,g$$

ومنها :

$$\int dV(x) = \int m\,g\,dx$$

فإنّ طاقة الوضع :

$$V(x) = m\,g\,x + c$$

إنّ قيمة ثابت التكامل c ، تعتمد على المستوى الصفري لطاقة الوضع V(x) ، و يمكن أن نختار $c = 0$ و هذا يعني : أنّ $V = 0$ عندما $x = 0$ ، فتكون معادلة حفظ الطاقة الميكانيكية على الشكل الآتي :

$$E = \frac{m}{2} v_f^2 = m\,g\,x_0$$

$$= m\,g\,x + \frac{m}{2} v^2$$

حيث سرعة الجسيم عند ارتطامه بالأرض هي :

$$v_f = \sqrt{2\,g\,x_0}$$

مثال (1.3)

قذف جسم رأسيا للأعلى بسرعة ابتدائية v_0 من النقطة $x = 0$. احسب طاقته الكلية و جد معادلة حركته و حدد نقطة الرجوع و سرعة الجسيم و موقعه بدلالة الزمن ؟

الحل :

بما أنّ النظام محافظ ؛ فإنّ الطاقة الميكانيكية الكلية للجسيم ثابتة :

$$E = \frac{m}{2} v_0^2 = mg\,x_{max}$$

$$= \frac{m}{2} v^2 + mg\,x$$

حيث : x_{max} يمثّل أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم (و هي نقطة الرجوع) .

$$mg\,x_{max} = \frac{m}{2} v_0^2$$

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{2\,g}$$

و معادلة الحركة :

$$F = m\ddot{x}$$

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = - mg$$

$$\dot{x} = - gt + v_0$$

حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ، و v_0 هي السرعة الابتدائية للجسيم لحظة قذفه . و بمكاملة دالّة السرعة نجد أن دالّة موقع الجسيم :

$$x = - \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

ولكن $x = 0$ عندما $t = 0$ ، مما يجعل قيمة الثابت x_0 في المعادلة السابقة صفرا ، فتصبح دالّة موقع الجسيم :

$$x = - \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

1.7* تغير الجاذبية مع الارتفاع
(Variation of Gravity with Height)

إن قوة الجاذبية بين جسمين ، تعطى من خلال قانون نيوتن في الجاذبية ، فمقدار قوة الجذب بين الأرض و جسم كتلته m هي :

$$F_r = \frac{- GMm}{r^2} \qquad (1.41)$$

حيث G ثابت الجذب العام ، M كتلة الارض ، r المسافة بين الجسم و مركز الأرض ، و تدل الاشارة السالبة على أن F_r هي قوة جذب . و عندما يكون الجسم ملامسا لسطح الارض ، فإنّ مقدار هذه القوة يساوي : mg - . أي أنّ تسارع الجاذبية الأرضية قرب الأرض :

$$g = \frac{GM}{r_e^2} \qquad (1.42)$$

و إذا كان الجسم على ارتفاع x فوق مستوى سطح الأرض ، فإنّ بعده r عن مركز الأرض هو :

$$r = r_e + x$$

حيث r_e نصف قطر الأرض . و بإهمال القوى الأخرى (مثل مقاومة الهواء) نكتب القوة باستخدام المعادلتين (1.41) و (1.42) على الصورة :

$$F(x) = \frac{- GMm}{(r_e + x)^2} = \frac{- mg\, r_e^2}{(r_e + x)^2} = m\ddot{x} \qquad (1.43)$$

و لحلّ المعادلة التفاضلية لحركة جسيم ساقط أو مقذوف للأعلى مع مراعاة تغير قوّة الجاذبية ، نعوض عن $\ddot{x}$ بقيمتها :

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

فينتج :

$$m\,v\frac{dv}{dx} = \frac{-mg\,r_e^2}{(r_e+x)^2}$$

ومنها :

$$\int_{v_0}^{v} m\,v\,dv = \int_{x_0}^{x} \frac{-mg\,r_e^2}{(r_e+x)^2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}m\,v^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mg\,r_e^2\left[\frac{1}{r_e+x} - \frac{1}{r_e+x_0}\right] \qquad (1.44)$$

حيث v سرعة الجسيم عندما يكون على ارتفاع x فوق مستوى سطح الأرض . و هذه النتيجة في الحقيقة ، هي معادلة حفظ الطاقة الميكانيكية الكلية ، حيث أنّ طاقة الوضع على ارتفاعات كبيرة تعطى بالعلاقة :

$$V(x) = \frac{-mgr_e^2}{r_e+x} \qquad (1.45)$$

بدلا من العلاقة : $V(x) = -mgx$ ، عندما يكون الارتفاع x فوق سطح الأرض صغيرا .

مثال (1.4)

جد سرعة الإفلات v_0 لجسم كتلته m مقذوف للأعلى ؟

الحل :

مجموع الطاقة الابتدائية = مجموع الطاقة النهائية = صفر ؛ و ذلك أنّ المطلوب هو فقط أن يفلت الجسم من جذب الأرض دون أن يكون له أيّ طاقة حركية بعد خلاصه من جذب الأرض . وإفلات الجسم كذلك ، يتطلب أن تصبح طاقة وضعه صفرا . إذن مجموع طاقتي الوضع و الحركة للجسم عند قذفه صفر :

$$\frac{1}{2}m\,v_0^2 - \frac{GMm}{r} = 0$$

حيث : r بعد الجسم عن مركز الأرض لحظة قذفه :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\,GM}{r}}$$

نلاحظ أنّ سرعة الإفلات لا تعتمد على كتلة الجسم المقذوف ، وحيث إنّ قيم $G = 6.672\,x10^{-11}\frac{N.m^2}{kg^2}$ و $r_e = 6.37x10^6 m$ و $M = 6x10^{24} kg$ ؛ فإنّ قيمتها تساوي 11 km/sec عندما يقذف الجسم من سطح الارض ، $r = r_e$.

1.8 * القوى الدفعية (Impulsive Forces)

إنّ الدفع $\vec{I}$ كمية متجهة تساوي تكامل القوة المؤثرة بالنسبة لزمن التأثير :

$$\vec{I} \equiv \int_{t_0}^{t} \vec{F}(t')\,dt' = \vec{P}(t) - \vec{P}(0) \qquad (1.46)$$

حيث : $\vec{P}(0)$ كمية التحرك للجسيم عند الزمن t_0 ، أي قبل تأثير القوّة عليه و $\vec{P}(t)$ كمية التحرك للجسيم عند الزمن t ، و هذا يعني : أنّ الدفع يساوي التغيّر في كمية التحرك ، أي أنّ :

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

وعندما تكون الكتلة ثابتة فإنّ :

$$\vec{F}(t) = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

فينتج أنّ :

$$\int_{t_0}^{t} \vec{F}(t')\,dt' = m\left(\vec{v}(t) - \vec{v}_0\right) \qquad (1.47)$$

حيث : $\vec{v}_0$ السرعة الابتدائية عند الزمن $t = t_0$.

و إذا أردنا أن نجد دالّة موقع جسيم يتحرك في بعد واحد ، x ، مثلاً ، فإنّنا نكتب المعادلة السابقة كما يلي :

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = v_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t')\,dt' \qquad (1.48)$$

و التي تكاملها :

$$x - x_0 = v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{t''} \frac{F(t')}{m}\,dt'\right]dt'' \qquad (1.49)$$

حيث : x_0 الموقع الابتدائي عند الزمن $t = t_0$.

مثال (1.5)

إذا أثرت القوة الثابتة F على جسيم كتلته m ، فجد سرعته و موقعه بدلالة الزمن ؟

الحل :

باستخدام المعادلة (1.48) نجد أنّ دالّة السرعة للجسيم :

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t')\, d t' = v_0 + \frac{F}{m}\int_{t_0}^{t} d t' = v_0 + \frac{F}{m}(t - t_0)$$

حيث : v_0 سرعة الجسيم الابتدائية عند الزمن $t = t_0$ ، و $\frac{F}{m}$ مقدار التسارع الثابت للجسيم ، و $t - t_0$ زمن تأثير القوة على الجسيم . و بمكاملة دالة السرعة بالنسبة للزمن نجد دالّة الموقع للجسيم :

$$x - x_0 = v_0 (t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{F(t'' - t_0)}{m}\, dt''$$

$$= v_0 (t - t_0) - \frac{F}{m} t_0 (t - t_0) + \frac{F(t^2 - t_0^2)}{2m}$$

حيث : x_0 موقع الجسيم الابتدائي عند الزمن $t = t_0$.

مثال (1.6)

جسيم كتلته m أثرت عليه قوة متزايدة خطيّاً مع الزمن مقدارها $F(t) = ct$ ، حيث c مقدار ثابت . جد سرعته و موقعه بدلالة الزمن ؟

الحل :

عند تعويض مقدار القوة في معادلة الحركة نجد أنّ :

$$m \frac{dv}{dt} = c\, t$$

إذن :

$$\int_{v_0}^{v} dv' = \frac{1}{m}\int_{0}^{t} c\, t'\, d t'$$

نجري عملية التكامل بالنسبة للزمن فنحصل على دالة السرعة :

$$v = v_0 + \frac{c}{2m} t^2$$

حيث : v_0 سرعة الجسيم الابتدائية عند الزمن $t = 0$. أمّا الموضع فيمكن إيجاده على النحو التالي :

$$dx = v\, dt = \left(v_0 + \frac{c}{2m} t^2\right) dt$$

ومنها نحصل على دالة الموقع ، فتكون النتيجة :

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{c}{6m} t^3$$

حيث : x_0 موقع الجسيم عند الزمن $t = 0$.

1.9 * القوى المعتمدة على السرعة ، و السرعة الحديّة
Velocity -Dependent Forces and Terminal Velocity

في بعض الحالات الفيزيائية نجد أنّ القوة تعتمد على السرعة ، ومن الحالات المعروفة , حركة جسم خلال مائع ، كحركة هبوط المظلّي في المظلة . معادلة الحركة التفاضلية تكون على الصيغة التالية :

$$F_0 + F(v) = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = m\,v\frac{dv}{dx} \tag{1.50}$$

حيث : F_0 قوة ثابتة لا تعتمد على السرعة ، بينما الاقتران $F(v)$ يصف قوّة مقاومة المائع للجسم . في الحالات العملية $F(v)$ ليس اقترانا بسيطا ، و قد يوجد من خلال التجربة . و بالتقريب يمكن أن نكتب $F(v)$ كما يلي :

$$F(v) = -c_1 v - c_2 v\,|v| = -v\{c_1 + c_2\,|v|\} \tag{1.51}$$

حيث : c_1 و c_2 ثابتان يعتمدان على شكل ، و حجم الجسم ، و القيمة المطلقة لسرعته . وأيضا من الحالات الفيزيائية المعروفة التي تعتمد فيها القوى على السرعة ، حركة جسيم مشحون بشحنة مقدارها q يتحرك في مجال كهرومغناطيسي . في هذه الحالة ، القوة الكهرومغناطيسية نسميها قوة لورنتز (Lorentz Force) و تعطى بالعلاقة :

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\,\vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{1.52}$$

حيث : $\vec{E}$ و $\vec{B}$ المجالان الكهربائي و المغناطيسي على الترتيب .

مثال (1.7)

قذف جسيم أفقيا بسرعة ابتدائية v_0 على سطح أفقي أملس ، يتعرّض الجسيم لتيار هوائي مقاومته $F(v) = -c_1 v$. جد معادلة الحركة و دالّتي السرعة والموقع للجسيم ، ثم جد الموقع الحدي له ؟

الحل :

في هذه الحالة نلاحظ أنّ القوّة الثابتة F_0 ، هي قوّة جذب الأرض العمودية على اتّجاه حركة الجسيم في المستوى الأفقي ، وهذه القوة تعادلها قوة رد فعل السطح للجسم ؛ ولذلك تكون معادلة الحركة التفاضلية في المستوى الأفقي :

$$F(v) = -c_1 v = m\frac{dv}{dt}$$

و بإجراء تكامل معادلة الحركة هذه ، نجد دالّة سرعة الجسيم على النحو التالي :

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv'}{v'} = -\frac{c_1}{m}\int_{t_0}^{t} dt'$$

$$\mathrm{Ln}\,\frac{v}{v_0} = -\frac{c_1}{m}(t - t_0)$$

و منها فإنّ :

$$v = v_0 \exp\left\{-\frac{c_1}{m}(t - t_0)\right\}$$

لو افترضنا أنّ الجسيم بدأ حركته عند الزمن $0 =$. من الموقع x_0 ، و بسرعة إبتدائيّة v_0 ، فإنّ :

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \exp\left(-\frac{c_1}{m}t\right)$$

و بإجراء تكامل العلاقة الأخيرة لدالّة سرعة الجسيم ، نحصل على دالّة موقع الجسيم :

$$x - x_0 = \int_0^t v_0 \exp\left(-\frac{c_1}{m}t'\right) dt' = v_0 \frac{m}{c_1}\left[1 - \exp\left(-\frac{c_1}{m}t\right)\right]$$

الموقع الحدي x_{ter} (Terminal Position) للجسيم هو قيمة x عندما $t = \infty$ ، أي أنّ :

$$x_{ter} = x_0 + v_0 \frac{m}{c_1}\left[1 - \exp(-\infty)\right]$$

$$x_{ter} = x_0 + \frac{m\, v_0}{c_1}$$

مثال (1.8)

في المثال السابق إذا كانت $F(v) = -c_2 v^2$ ، فجد دالّة سرعة الجسيم بدلالة الزمن؟

الحل :

من قانون نيوتن الثاني نجد أنّ المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم هي :

$$a \equiv \frac{dv}{dt} = \frac{F(v)}{m} = \frac{-c_2 v^2}{m}$$

ثم نجري عملية التكامل :

$$-\frac{m}{c_2}\int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{v'^2} = \int_0^t dt'$$

فنحصل على :

$$t = \left.\frac{m}{c_2 v'}\right|_{v_0}^{v}$$

و بتعويض حدود التكامل في الطرف الأيمن نجد :

$$t = \frac{m}{c_2}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right)$$

و من الممكن كتابة هذه المعادلة على الصيغة التالية :

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{v_0}+\frac{c_2}{m}t=\frac{c_2 t v_0+m}{m v_0}$$

إذن نحصل على دالة السرعة بدلالة الزمن :

$$v=\frac{m v_0}{c_2 t v_0+m}=\frac{v_0}{\frac{c_2 t v_0}{m}+1}$$

في المثال السابق ، هل يوجد موضع حدّي للجسيم ؟ ولماذا ؟

الحل :

$$v \equiv \frac{dx}{dt}=\frac{v_0}{\frac{c_2 t v_0}{m}+1}$$

و باجراء التكامل نحصل على دالة الموقع بدلالة الزمن :

$$x=x_0+\frac{m}{c_2}\,Ln\left\{\frac{c_2 t v_0}{m}+1\right\}$$

و بالتعويض عن الزمن باللانهاية نجد أن x تؤول أيضا إلى اللانهاية ، و هذا يعني : أنّه لا يوجد موضع حدّي .

1.10 * ألحركة الاهتزازيّة (Oscillatory Motion)

إن الحركة الدّوريّة من أكثر الحركات حدوثا في هذا الكون الزاخر بآيات الله سبحانه و تعالى ، فحركة النجوم ، و الكواكب ، و الاقمار ، هي حركات دورية تعيد نفسها خلال فترة محددة قد تطول أو تقصر ، حسب قوانين وضعها الخالق سبحانه و تعالى ، و الحركات الاهتزازية هي نوع من الحركات الدّوريّة ، و من الأمثلة على الحركات الاهتزازية : حركة رقاص الساعة (البندول) ، واهتزاز الذرات في التركيب البلوري للمادة ، و اهتزاز أوتار الآلات الموسيقية ، و اهتزاز جزيئات الهواء في آلات الموسيقى الهوائية ، وهذه الحركات منها البسيط ، و منها المعقد . و سنركز هنا على دراسة الحركة التوافقية البسيطة مستخدمين قوانين نيوتن ، و في فصول لاحقة سوف ندرس الحركة الاهتزازية باستخدام معادلات لاجرانج .

1.10.1*الحركة التوافقية البسيطة (Simple Harmonic Motion)

في الحركة التوافقية البسيطة لجسم يتحرك في بعد واحد (x) ، من الملاحظ أنّ موقعه بالنسبة لنقطة الاتزان (نقطة الإتزان هي : النقطة التي تكون عندها القوة المؤثرة على الجسم صفرا)

يتغير مع الزمن وفقا للعلاقة :

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \tag{1.53}$$

حيث : A سعة الاهتزازة (Amplitude) ، وهي أقصى إزاحة للجسم حول موضع اتزانه ، و δ زاوية الطور(Phase Angle) ، و ω التردد الزاوي (Angular Frequency) . و العلاقة التي تربط الزمن الدّوري للاهتزاز (Period of Oscillation) T مع التردد الزاوي ω هي :

$$\omega \equiv 2\pi\nu \equiv \frac{2\pi}{T} \tag{1.54}$$

حيث : ν تمثل التّردد (Frequency) ، أي عدد المرّات التي تتكرّر فيها الحركة في الثانية الواحدة .

ويمكن إيجاد سرعة الجسم و تسارعه حول موضع اتزانه على النحو التالي :
سرعة الجسم هي المشتقّة الأولى لدالّة الموقع :

$$\dot{x} = v \equiv \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \delta) \tag{1.55}$$

تسارع الجسم حول موضع اتزانه هو المشتقّة الأولى لدالّة السرعة :

$$\ddot{x} \equiv \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta) \tag{1.56}$$

من المعادلتين (1.53) و (1.56) نجد أنّ العلاقة بين إزاحة الجسم وتسارعه هي :

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \tag{1.57}$$

أي أنّ كلا من التسارع والقوّة يتناسب طرديًا مع الإزاحة و اتجاههما يكون في الاتجاه المعاكس للإزاحة .

عندما تكون $\sin(\omega t + \delta) = -1$ ، فإنّ سرعة الجسم تصبح أقصى ما يمكن :

$$v_{max} = -\omega A\ (-1) = \omega A \tag{1.58}$$

في حين عندما تكون $\cos(\omega t + \delta) = -1$ ، يكون تسارع الجسم أقصى ما يمكن :

$$a_{max} = -\omega^2 A\ (-1) = \omega^2 A \tag{1.59}$$

إذا بدأ الجسم حركته عند الزمن $t = 0$ من الموقع x_0 بسرعة ابتدائية v_0 ، فإنّ العلاقتين اللتين تربطان زاوية الطور و سعة الاهتزازة بقيمة كل من x_0 و v_0 هما :

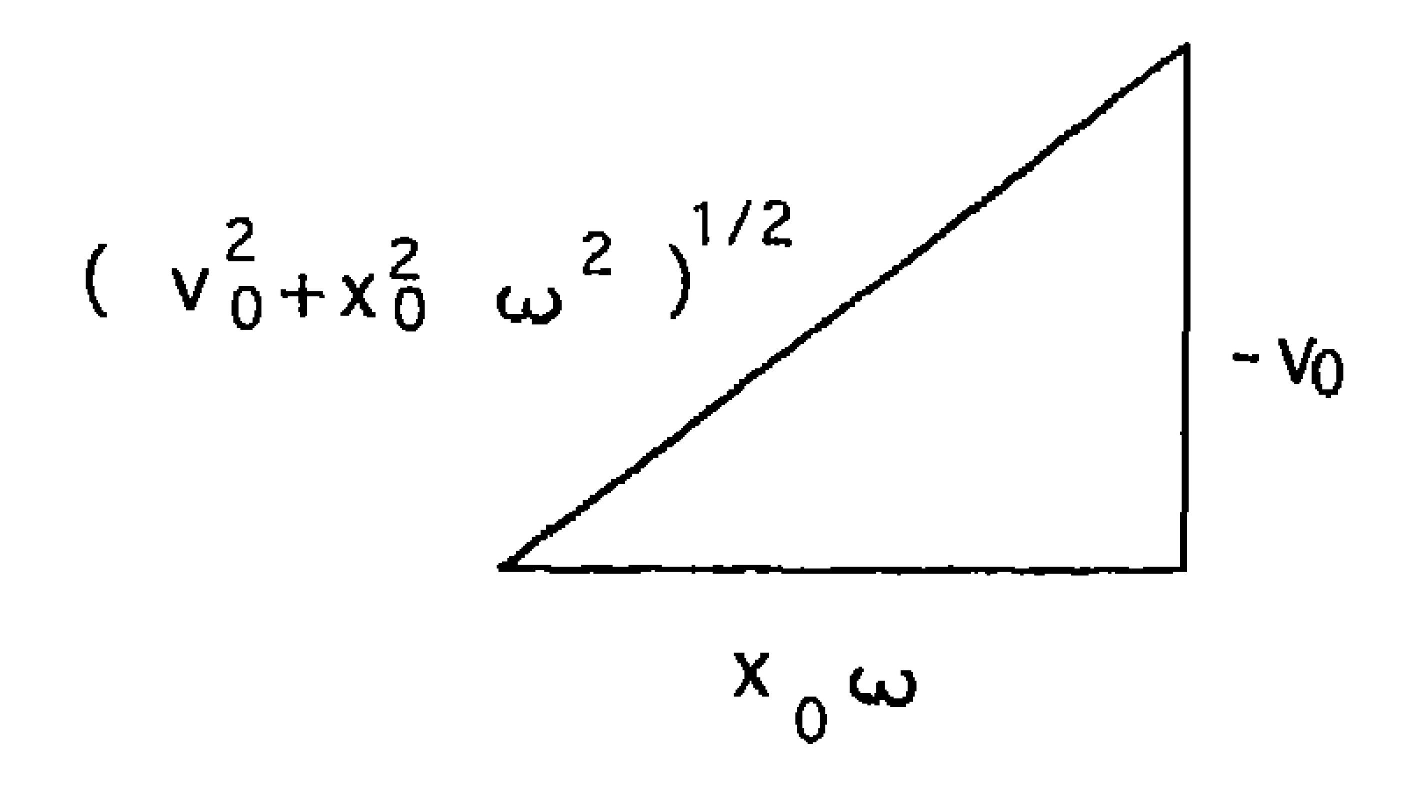
$$x_0 = A\cos\delta \text{ ، } v_0 = -\omega A\sin\delta$$

لإيجاد سعة الاهتزازة تقسم السرعة الابتدائية v_0 على الموقع الابتدائى x_0 ، فينتج :

$$\frac{v_0}{x_0} = -\frac{\omega A\sin\delta}{A\cos\delta} = -\omega\tan\delta$$

لكن :

$$A = \frac{x_0}{\cos\delta}$$



الشكل (1.2)

إعتمادا على الشكل (1.2) ، نعوض قيمة $\cos\delta$ بدلالة قيمتي السرعة والموقع عند بداية الحركة ، فنجد أنّ سعة الاهتزازة :

$$A = \frac{x_0}{x_0\,\omega}\sqrt{v_0^2 + x_0^2\,\omega^2}$$

$$A = \frac{1}{\omega}\sqrt{v_0^2 + x_0^2\,\omega^2}$$

و بصورة أخرى :

$$A = \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2} \qquad (1.60)$$

إنّ الحركة التوافقية البسيطة تتميز بعدّة خصائص ، أهمها :

1) أنها توصف بمعادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ، وينطبق بشأنها مبدأ التراكب (Superposition Principle) . فإذا وجد حلان x_1 و x_2 لدالة الموقع ، فإنّ $c_1 x_1 + c_2 x_2$ هو حلٌّ آخر لدالة الموقع ، حيث c_1 و c_2 ثابتان ، و يسمى هذا الحل بالحل العام (General Solution) .

2) إنّ التّردّد و الزمن الدوري (الفترة الزمنية اللازمة حتى تعيد الحركة نفسها) لا يعتمدان على إزاحة الجسم العظمى عن موضع اتزانه .

3) يكون اتجاه القوة المسببة للحركة معاكسا لاتجاه الإزاحة $F \propto -x$.

4) الإزاحة ، والسرعة ، والتسارع ، جميعها تتغيرعلى شكل دالة جيبية مع الزمن ، إلا أنّها مختلفةٌ في الطور .

1.10.2*الهزاز التوافقي (The Harmonic Oscillator)

إذا أثرت قوة على جسم بحيث ترجعه باستمرار لموضع اتزانه عندما يزاح الجسم عنه ، فإن الحركة الناجمة هي حركة اهتزازية ، ومن الأمثلة على هذه الحركة : حركة جسم كتلته m معلق من الطرف الحرّ لزنبرك معامل مرونته k .

إنّ القوة التي يؤثّر فيها الزنبرك على الجسم تعطى بقانون هوك (Hooke's Law)

$$F(x) = -k(x - x_e) \qquad (1.61)$$

حيث إنّ : $X = x - x_e$ تمثل إزاحة الجسم عن موقع اتزانه x_e ، والذي تكون عنده القوّة المؤثّرة على الجسم $F = 0$. باستخدام قانون نيوتن الثاني للحركة ، نجد أنّ معادلة حركة الجسم هي :

$$F(x) = -kX = m\ddot{x} = m\ddot{X}$$

$$m\ddot{X} + kX = 0 \qquad (1.62)$$

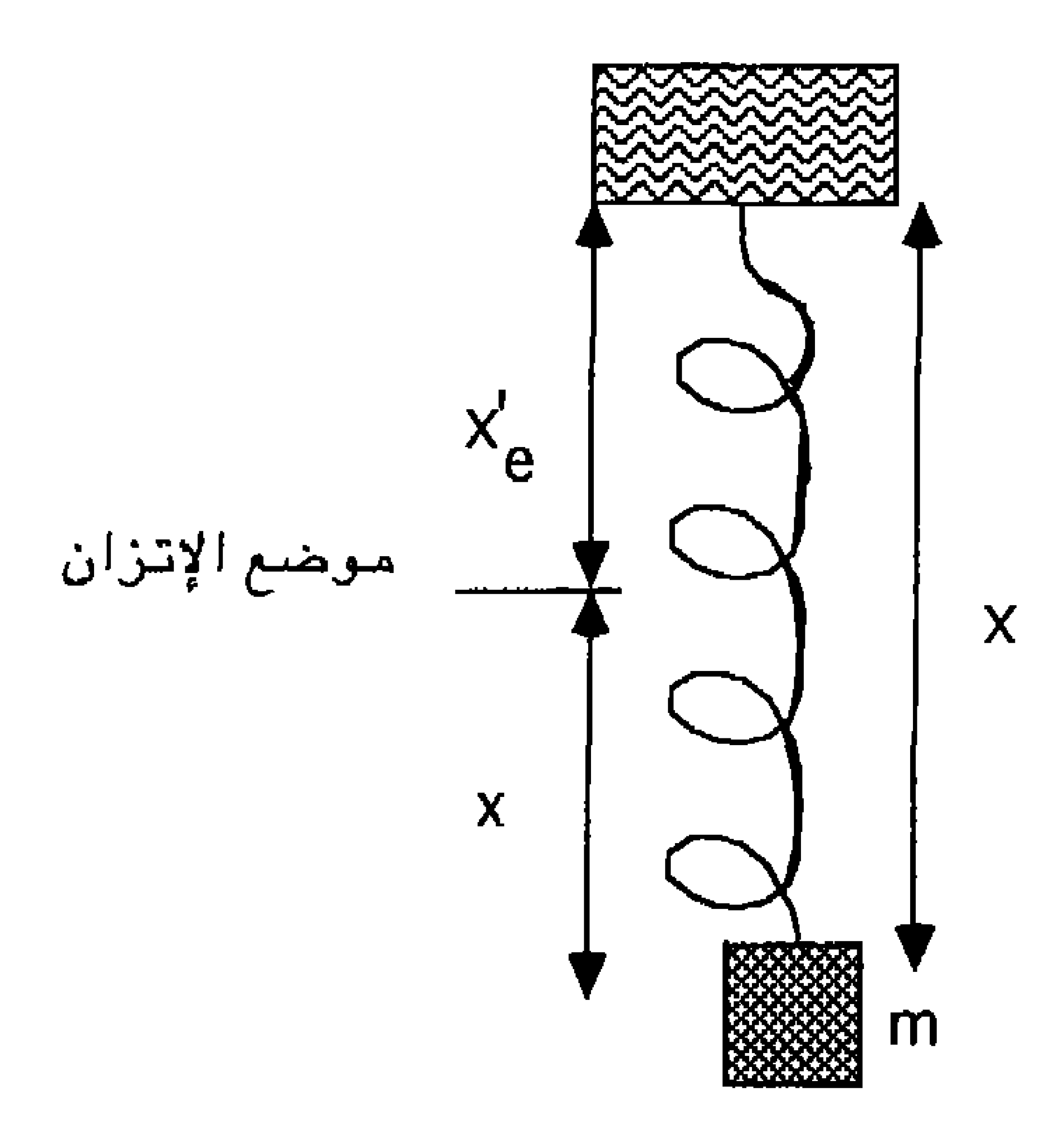
نستطيع استخدام حلٍّ للمعادلة السابقة على الصيغة التالية :

$$X = A\cos(\omega_0 t + \delta) \qquad (1.63)$$

حيث إنّ قيمة الثابتين A و δ تتعيّنُ تبعاً للشروط الابتدائية للحركة ، و $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. إنّ هذه الحركة و أشباهها تسمى حركة توافقية بسيطة ، و القوة التي يؤثربها الزنبرك على الجسم ، تسمى قوة الإرجاع (Restoring Force) .

1.10.3* تأثير القوة الثابتة الخارجية على الحركة التوافقية
Effect of a constant External Force on a Harmonic Oscillation

لتوضيح تأثير القوة الثابتة الخارجية على الحركة التوافقية ، نأخذ زنبركا معامل مرونته k ، مهمل الكتلة ، و معلّق رأسيّا من أحد أطرافه ، بينما الطرف الآخر الحر عُلّقت به كتلة مقدارها m . انظر الشكل (1.3) .



الشكل (1.3) : زنبرك معامل مرونته k ، مهمل الكتلة و معلّق رأسيّا من أحد أطرافه ، بينما الطرف الآخر الحر علّقت به كتلة مقدارها m.

إنّ مقدار القوة المحصلة التي تؤثّر على الكتلة هي :

$$F = -k(x - x_e) + mg \qquad (1.64)$$

هذا على افتراض أن اتجاه الإزاحة x موجب للأسفل ، و نستطيع كتابة معادلة الحركة على الصيغة : $F = -kX + mg$ إذا فرضنا أنّ $X = x - x_e$ كما مر بنا سابقا ، ولكن من الأفضل تعريف X على أنّها الإزاحة عن موضع الاتزان الجديد x'_e و الذي يتحدّد بجعل $F = 0$. إذن :

$$0 = -k(x'_e - x_e) + mg$$

و منها نجد أنّ موضع الاتزان الجديد :

$$x'_e = x_e + \frac{mg}{k} \qquad (1.65)$$

فتكون قيمة X :

$$X \equiv x - x'_e = x - \left(\frac{mg}{k} + x_e\right) \qquad (1.66)$$

و بتعويض قيمة $x - x_e$ من المعادلة (1.66) في المعادلة (1.64) نحصل على :

$$F = -k\left(X + \frac{mg}{k}\right) + mg = -kX \qquad (1.67)$$

بإيجاد المشتقة الثانية للعلاقة (1.66) بالنسبة للزمن نجد أنّ $\ddot{X} = \ddot{x}$. نستخدم قانون نيوتن الثاني فنجد أنّ المعادلة التفاضلية للحركة هي :

$$m\ddot{X} + kX = 0 \qquad (1.68)$$

لقد مرّ بنا أنّ حل هذه المعادلة يُعطى بالعلاقة :

$$X(t) \equiv x - \frac{mg}{k} - x_e = A\cos(\omega_0 t + \delta)$$

$$x = \frac{mg}{k} + x_e + A\cos(\omega_0 t + \delta) \qquad (1.69)$$

حيث إنّ سعة الاهتزازة و زاوية الطور δ تتحدّدان حسب الشروط الابتدائية للحركة .

مثال (1.9)

زنبرك مهمل الوزن معامل مرونته k مُعلّق رأسيا ، و يحمل في طرفه الحر كتلة مقدارها m ، استطال الزنبرك مسافة D_1 بفعل تأثير الكتلة m ، ثُم سُحب للأسفل فاستطال مسافة إضافيّة قدرها D_2 من موضع اتزانه ، و تُرك عند الزمن $t = 0$. جد ما يلي :

أولا) موقع الكتلة ؟ ثانيا) سرعة الكتلة عند مرورها في نقطة الاتزان ؟ ثالثا) تسارع الكتلة عند نقطة الرجوع ؟

الحل :

إنّ النقطة التي تقابل استطالة الزنبرك مسافة D_1 لتحدّد موضع الاتزان :

$$F(x_e) = -kD_1 + mg = 0$$

نستطيع كتابة معامل مرونة الزنبرك بدلالة الاستطالة D_1 على النحو التالي :

$$k = \frac{mg}{D_1}$$

نعوض قيمة k ، فنجد أنّ التّردّد الزّاوي لإهتزاز الكتلة هو :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{D_1}}$$

و موقع الجسم بشكل عامّ هو :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta)$$

و دالّة السرعة هي :

$$\dot{x}(t) = -A\,\omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta)$$

من الشروط الابتدائية للحركة نستطيع إيجاد زاوية الطور و سعة الاهتزازة على النحو الآتي :

$$D_2 = A\cos\delta$$

$$\dot{x}_0 = 0 = -A\,\omega_0 \sin\delta$$

$$D_2 = A\ ,\ \text{عندما}\ \delta = 0$$

إذن ، تكون دالّة الموقع للجسم هي :

$$x(t) = D_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{D_1}}\, t\right)$$

و دالّة السرعة هي :

$$\dot{x}(t) = -D_2\sqrt{\frac{g}{D_1}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{g}{D_1}}\, t\right)$$

و دالّة التسارع هي :

$$\ddot{x}(t) = -D_2\frac{g}{D_1}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{D_1}}\, t\right)$$

السرعة في موقع الاتزان تساوي :

$$\dot{x} = D_2\sqrt{\frac{g}{D_1}}$$

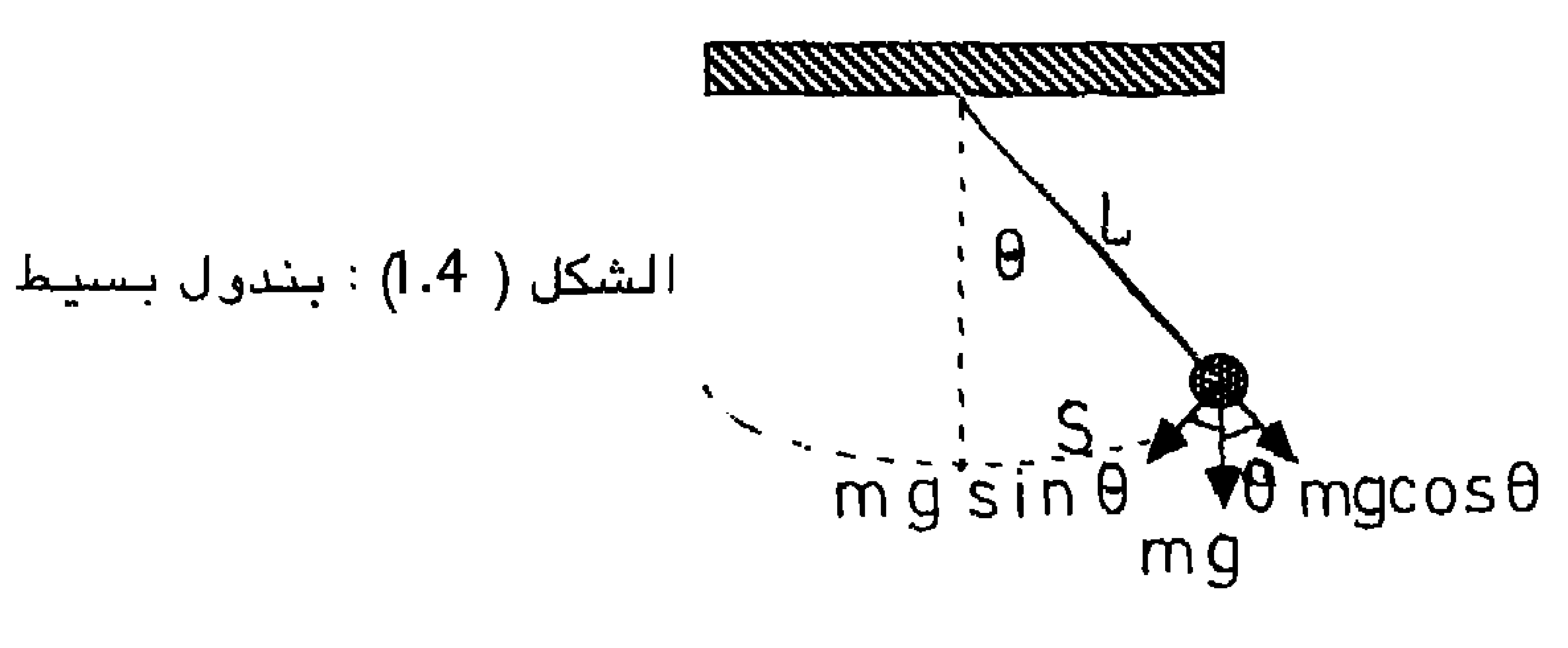
وهي عبارة عن أقصى سرعة و صلها الجسم ، كما أن التسارع في نقطة الرّجوع يساوي :

$$\ddot{x} = D_2\frac{g}{D_1}$$

و يمثل أقصى تسارع يصل إليه الجسم أثناء الحركة .

مثال (1.10)

بندول بسيط كتلته m و طوله L ، يتحرك في المستوى xy . جد دالّة الموقع و الزمن الدوري للبندول ؟ انظر الشكل(1.4) .



الشكل (1.4) : بندول بسيط

الحل :

نحلل وزن الجسم mg إلى مركبتين : احداهما مماسية ، و الأخرى عمودية على مسار الحركة ، كما في الشكل (1.4) ، إنّ القوة المماسية تمثل القوة المرجعة (Restoring Force) F_s و التي بسببها تحصل الحركة التوافقية البسيطة حسب المعادلة التالية :

$$F_s = - mg \sin\theta = m\ddot{s}$$

هنا : s تمثل إزاحة الجسم على خط سيره عن موقع اتزانه (الذي يقابل الوضع الرأسي للبندول ، $\theta = 0$) . و منها :

$$m\ddot{s} + mg \sin\theta = 0$$

و لكن $s = L\theta$ ، حيث الزاوية θ مقاسةً بالتقدير الدائري . عندما تكون الزاوية θ صغيرة ؛ فإنّ $\theta \cong \tan\theta \cong \sin\theta$ ، و عندها نستطيع كتابة معادلة الحركة على النحوالتالي :

$$mL\ddot{\theta} + m g \theta = 0$$

و منها فإنّ :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

و هذه معادلة حركة توافقية بسيطة تردّدها الزاوي :

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

و الزمن الدوري لها :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

و هناك الأمثلة الكثيرة على الحركة الاهتزازية لا نود ذكرها في هذا الفصل لأننا سنناقشها باستخدام معادلات لاجرانج علما بأن الهدف من هذا الكتاب هو الأخذ بيدي القارىءلدراسة حركة الأجسام باستخدام معادلات لاجرانج و هاميلتون .

1.10.4* الطاقة و الحركة الاهتزازية للبندول البسيط

يمكن تمثيل البندول البسيط بجسيم كتلته m معلق في الطرف الحر لخيط مهمل الكتلة طوله L مثبت طرفه الآخر في سقف غرفة . الوضع العمودي للخيط يمثل نقطة الإتزان للجسيم ، و التي تكون عندها الزاوية $\theta = 0$. لو أزيح الجسيم المعلق في الخيط عن الوضع الرأسي قليلا ليصنع زاوية θ_0 ثم ترك يتأرجح تحت تأثير قوة جذب الأرض ، فإننا نلاحظ أنّ الزاوية القصوى التي يصنعها الخيط مع الوضع الرأسي تتناقص تدريجيا بفعل تأثير قوة الاحتكاك مع الهواء ، معربة عن تضاؤل (خمود) الحركة الاهتزازيّة للبندول . فعند دراسة الحالة التي تكون فيها قوة الاحتكاك مع الهواء مهملة . نلاحظ أنّ الزاوية التي يصنعها الخيط مع الوضع الرأسي تنحصر في المدى $\theta_0 \geq \theta \geq -\theta_0$. في هذه الحالة تكون الحركة الاهتزازيّة للبندول حركة توافقية بسيطة ، و لو فرضنا أن طاقة الوضع عند نقطة الاتزان صفراً ، فإنّ طاقة الوضع عند الزاوية θ هي :

$$V(\theta) = mg\,h = mg\,L\,(1 - \cos\theta) \tag{1.70}$$

و عندما تكون الزاوية θ صغيرة كما في الشكل (1.4) ، فإنّه يمكن اعتبار :

$$\cos\theta \cong \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \tag{1.71}$$

و القيمة التقريبية لطاقة الوضع هي :

$$V \cong mg\,L\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) = mg\,L\,\frac{\theta^2}{2} \tag{1.72}$$

إنّ قيمة الزاوية θ بالتقدير الدائري (Radians) $\theta = \frac{S}{L}$ ، حيث S طول القوس المقابل ، و L طول البندول . إنّ طاقة الوضع بدلالة S هي :

$$V \cong \frac{mg\,L}{2}\left(\frac{S}{L}\right)^2 = \frac{mg}{2L}S^2 \tag{1.73}$$

يمكن كتابة الطاقة الميكانيكية الكلّية E بدلالة كلّ من الازاحة S والسرعة $\dot{S}$ على النحو التالي :

$$E = T + V \cong \frac{m}{2}(\dot{S})^2 + \frac{mg}{2L}S^2 \tag{1.74}$$

و منها فإنّ :

$$\frac{dS}{dt} \cong \dot{S} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - \frac{mg}{2L}S^2\right]} \tag{1.75}$$

* * *

مثال (1.11)

إذا علمت أنّ طاقة الوضع لجسيم كتلته m يتحرك في البعد x هي :

$$V(x) = B\,x^2 + A\,x^{-2}$$

حيث A و B ثابتان موجبان . فجد موقع اتزان الجسيم ، ثمّ بين أن زمن الدورة للإهتزازات الصغيرة حول موقع الإتزان هو : $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{8B}}$ ؟ .

الحل :

$$V(x) = B\,x^2 + A\,x^{-2}$$

$$\frac{dV(x)}{dx}\Big|_{x_o} = 2\,B\,x_o - 2\,A\,x_o^{-3} = 0$$

$$x_o\left(2\,B - 2\,A\,x_o^{-4}\right) = 0$$

$$x_o = 0\ ,\ x_o = \left(\frac{A}{B}\right)^{1/4}$$

تكون طاقة الوضع مالانهاية عند النقطة $x_o = 0$ ، لذلك فهي ليست نقطة اتزان .

أمّا : عند النقطة $x_o = \left(\frac{A}{B}\right)^{1/4}$ ، فإنّ المشتقة الثانية لطاقة الوضع :

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2}\Big|_{\left(\frac{A}{B}\right)^{1/4}} = 2\,B + 6\,A\,\frac{B}{A} = 8B > 0$$

إذن النقطة $x_o = \left(\frac{A}{B}\right)^{1/4}$ تمثل موقع اتزان ، و تكون طاقة الوضع عندها أصغر ما يمكن . باستخدام متسلسلة تايلور نستطيع كتابة القيمة التقريبية للقوة على الصورة التالية :

$$F(x) \cong F\left(x_o\right) + \frac{dF}{dx}\Big|_{x_o}\left(x - x_o\right) = -k\left(x - x_o\right)$$

قيمة ثابت المرونة للحركة الإهتزازية :

$$k = 8\,B$$

و التردد الزاوي :

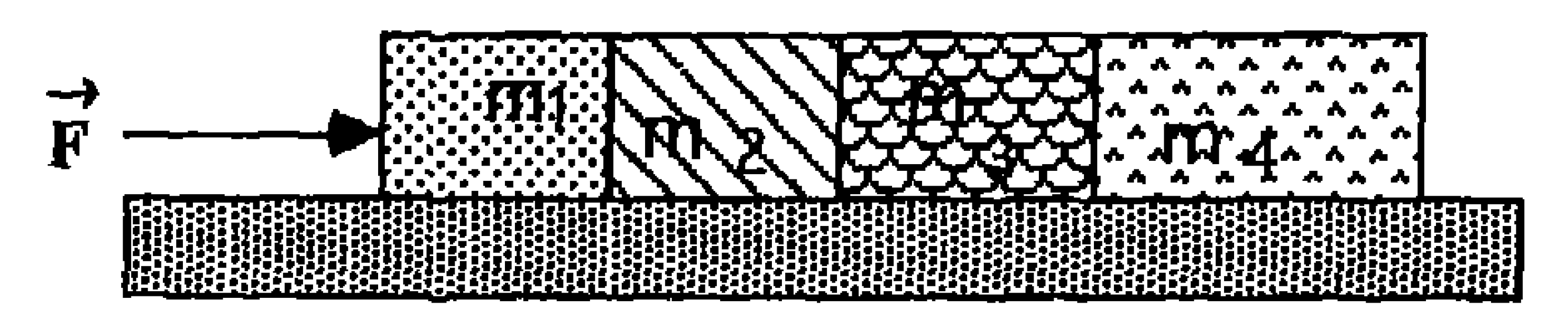
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8B}{m}} = \frac{2\pi}{\tau}$$

و زمن الدورة :

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{8B}}$$

أسئلة عامة و حلول جزئية

1) أربعة أجسام متلاصقة ، كتلتها m_1 ، m_2 ، m_3 و m_4 ، تنزلق على سطح أفقي أملس بفعل تأثير القوة الخارجية $\vec{F}$ ، الشكل (1.5) . جد التسارع لكل كتلة ، ثم مقادير قوى الفعل و رد الفعل المتبادلة بين كل جسمين متلاصقين ؟ .



الشكل (1.5) : أربعة أجسام متلاصقة كتلتها m_1 ، m_2 ، m_3 و m_4 تنزلق على سطح أفقي أملس بفعل تأثير القوة الخارجية $\vec{F}$

الحل الجزئي :

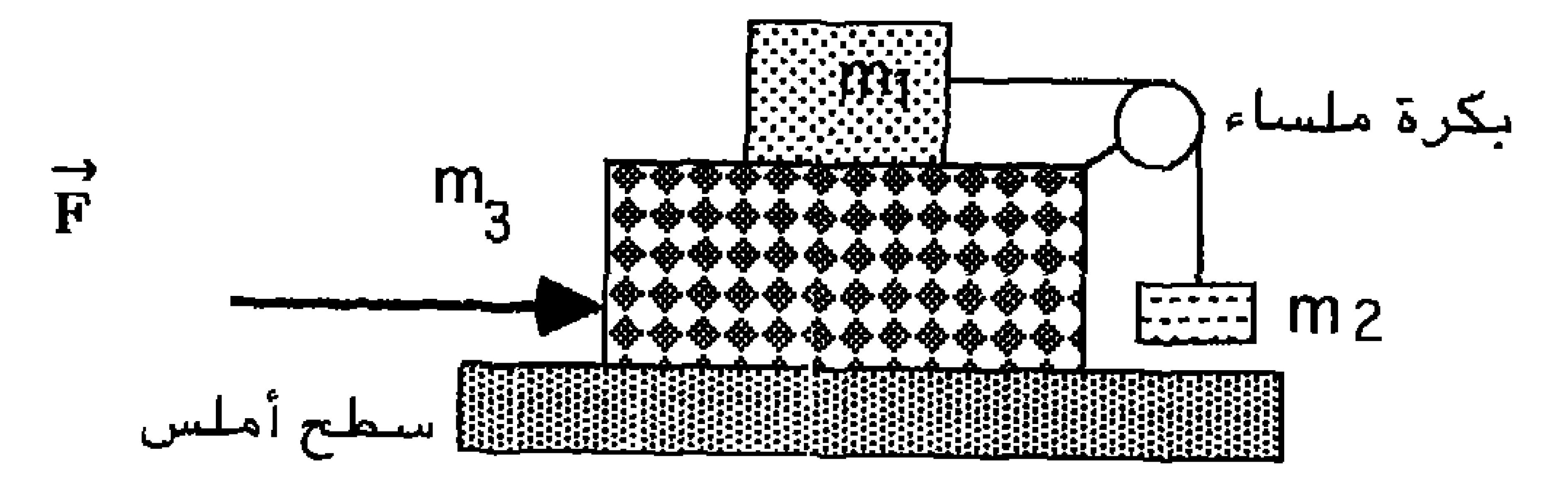
التسارع هو :

$$a = \frac{F}{(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)}$$

F_{12} هي مقدار قوة الفعل و رد الفعل المتبادلة بين m_1 و m_2 ، F_{23} هي مقدار قوة الفعل و رد الفعل المتبادلة بين m_2 و m_3 ، F_{34} هي مقدار قوة الفعل و رد الفعل المتبادلة بين m_3 و m_4 ، فإنّ :

$$F_{12} = F - m_1 a$$
$$F_{23} = F - (m_1 + m_2)\, a$$
$$F_{34} = F - (m_1 + m_2 + m_3)\, a$$

2) معتمدا على الشكل (1.6) ، جد مقدار القوة $\vec{F}$ اللازمة لجعل المجموعة تتحرك بحيث لا تنزلق الكتلتان m_1 و m_2 . مع العلم أن قوى الإحتكاك و كتلة الحبل مهملة ؟ .



الشكل (1.6) : تتحرك الكتلتان m_1 ، m_2 بفعل تأثير القوة الخارجية $\vec{F}$ دون انزلاق

الجواب :

$$F = (m_1 + m_2 + m_3)\, a = (m_1 + m_2 + m_3)\, \frac{m_2\, g}{m_1}$$

3) قمر صناعي كتلته m ، يسير في مسار دائري على ارتفاع h من سطح الأرض ، جد سرعته و زمن دورته بدلالة كل من h ، و ثابت الجذب العام G ، و كتلة الأرض M_E ، ونصف قطرها R_E ؟ .
الجواب :

$$v = \frac{2\pi(R_E + h)}{\tau}$$

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 (R_E + h)^3}{G M_E}$$

4) إذا كانت العلاقة بين سرعة جسيم ، $\dot{x}$ ، و إزاحته ، x ، هي :

$$\dot{x} = bx^{-3}$$

حيث b ثابت موجب ، فجد القوة المؤثرة على الجسيم بدلالة موقعه ؟ .
الجواب :

$$F = -3mb^2x^{-7}$$

5) احسب السرعة $\dot{x}$ بدلالة الإزاحة x لجسيم كتلته m ، إذا علمت أن القوة المؤثرة عليه $F = F_0 + cx$ حيث : c و F_0 ثابتان . افرض أن الجسيم بدأ حركته من السكون عند الموقع $x_0 = 0$.
الجواب :

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2x}{m}\left(F_0 + \frac{cx}{2}\right)}$$

6) جد القوّة المرافقة لدالّة طاقة الوضع التالية :

$$V = c\exp - (\alpha x + \beta y + \gamma z)$$

ثم جد قيمة الثابت β الّذي يجعل دالّة القوّة

$$\vec{F} = \hat{i}\,(z/y) + \beta\,\hat{j}\,(zx/y^2) + \hat{k}\,(x/y)$$

محافظة ؟ .
الجواب :

$$\vec{F} = (\hat{i}\,\alpha + \hat{j}\,\beta + \hat{k}\,\gamma)\,V$$

إنّ $\nabla \times \vec{F} = 0$ فقط إذا كانت $\beta = -1$.

7) جسيم كتلته m ، تؤثر عليه القوة $F = kvx$ ، حيث k ثابت موجب ، و v سرعة الجسيم ، و x موقعه . جد دالّة موقع الجسيم بدلالة الزمن ، إذا علمت أن الجسيم يمر في نقطة الأصل بسرعة v_0 عند الزمن $t = 0$ ؟ .
الجواب :

$$x = \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{2mv_0}}}\tan\frac{t}{\sqrt{\frac{2m}{kv_0}}}$$

8) يسقط جسيم في مائع مقاومته تتناسب مع سرعة الجسيم ، $F(v) = -c_1 v$.
جد سرعته بدلالة الزمن و السرعة الحدية و المميز الزمني $\tau = \frac{m}{c_1}$ ؟ .
الحل الجزئي :

$$v = -\frac{mg}{c_1} + \left(\frac{mg}{c_1} + v_0\right) \exp\left(-\frac{c_1 t}{m}\right)$$

$$v = v_t + (-v_t + v_0) \exp(-t/\tau)$$

9) سقطت كرة صغيرة كتلتها m في سائل لزج . إذا علمت أن السرعة الإبتدائية صفر و الحدّية 0.40 m/s ، فجد قوة الممانعة (المقاومة) بدلالة الزمن ؟ .
الجواب :

$$c_1 v = -m\frac{dv}{dt} - mg$$

10) جد دالّة السرعة إذا سقط الجسم سقوطا حرّاً ، و عندما $t = 5\tau$ ؟
الجواب :

$$v = v_t \left\{1 - \exp(-t/\tau)\right\}$$

$$v = 0.9933\, v_t$$

11) يتحرك جسيم داخل مائع مقاومته تتناسب مع مربّع سرعة الجسيم ، $F(v) = -c_2 v^2$ ، حيث c_2 ثابت تناسب موجب القيمة . جد سرعة الجسيم بدلالة الزمن : (α) في حالة الصعود ، (β) في حالة النزول ؟ .
الحل الجزئي :
(α) في حالة الصعود

$$v = v_t \tan\left(\tan^{-1}\frac{v_0}{v_t} - \frac{t - t_0}{\tau}\right)$$

عندما يكون كل من t_0 و v_0 صفراً ، فإنّ :

$$v = v_t \tan\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

(β) في حالة النزول :

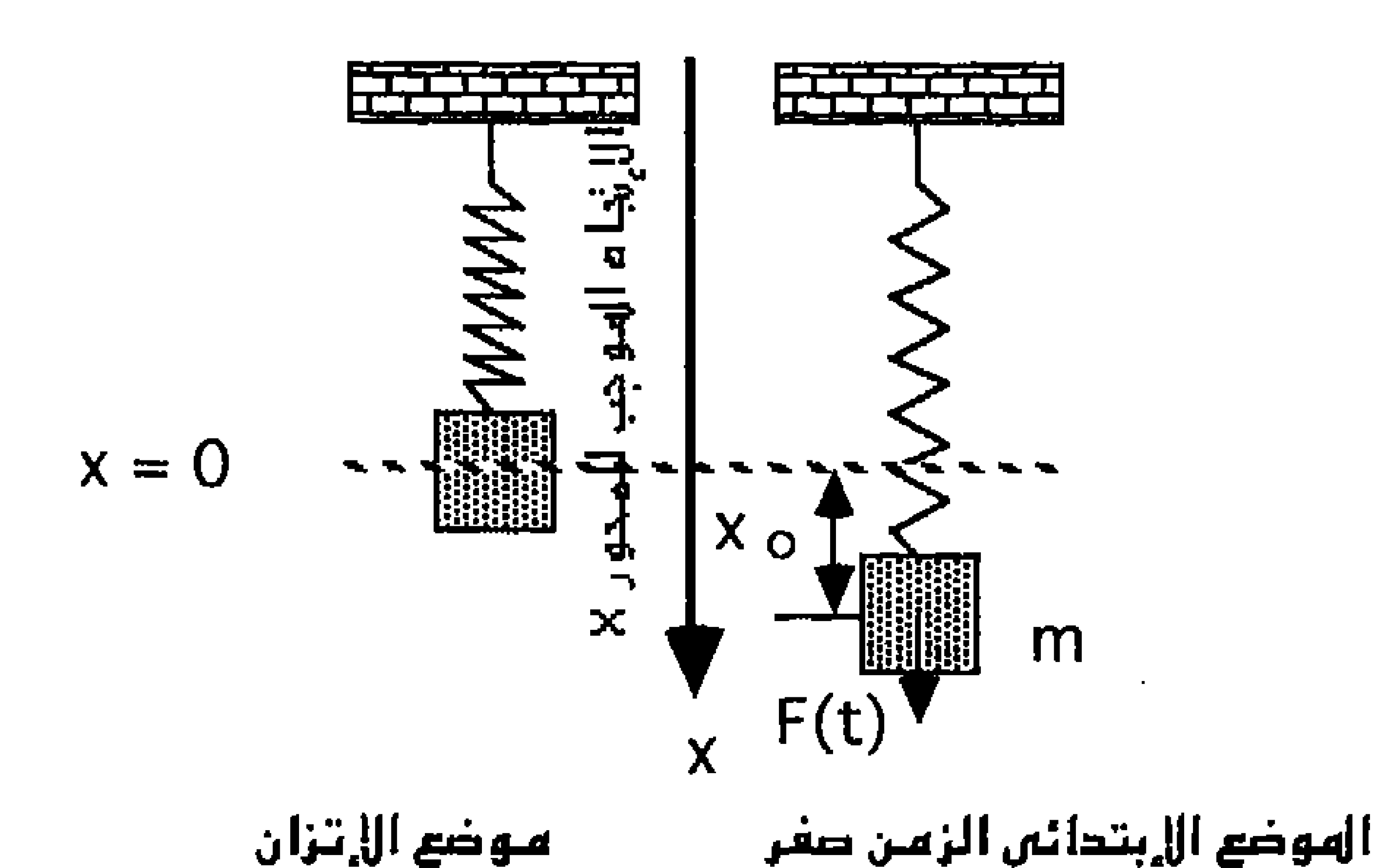
$$v = -v_t \tanh\left(\frac{t - t_0}{\tau} - \tanh^{-1}\frac{v_0}{v_t}\right)$$

عندما يكون كل من t_0 و v_0 صفراً ، نجد أنّ :

$$v = -v_t \tanh\left(\frac{t}{\tau} - \tanh^{-1} 0\right) = -v_t \tanh\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

12) أثبت أن $v = 0.99991\, v_t$ بعد زمن مقداره 5τ ؟ .

13) زنبرك ثابت مرونته k ، معلق من أحد طرفيه ، ثُبت بطرفه الحر كتلة مقدارها m ، ثم سُحب مسافة مقدارها x_o من موضع اتزانه ، ثُم ترك ليهتز بسرعة ابتدائية v_o ، و في نفس اللحظة طُبقت على النظام قوة خارجية F(t) ، حيث t الزمن ، كما في الشكل (1.7) . جد المعادلة التفاضلية لحركة هذا النظام ؟ .



الشكل (1.7) : زنبرك معلق في طرفه الحر كتلة معلقة

الحل الجزئي :

القوى المؤثرة في هذه الحالة هي :

1-القوة الخارجية F(t) ،

2- قوة الإرجاع (هوك) $- kx$ ،

3- مقاومة الهواء $- a \frac{dx}{dt}$ ، حيث a ثابت التناسب .

المعادلة التفاضلية هي :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{kx}{m} = \frac{F(t)}{m}$$

13) في السؤال السابق ، افترض أنّ الجسم بدأ الحركة من موضع تكون عنده استطالة الزنبرك صفرا ، جد المعادلة التفاضلية للحركة ؟ .

الجواب :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{kx}{m} = \frac{F(t)}{m} + g$$

14) إذا أهملنا القوة الخارجية و قوة مقاومة الهواء في السؤال (12) . فجد :

أ-أقصى سرعة للجسم ، ب- أقصى تسارع له ، ج- تردد الحركة ، د- زمن الدورة ؟

الفصل الثاني
معادلات لاجرانج
(Lagrange's Equations)

2.1*مقدمة

استخدمنا في الفصل السابق قانون نيوتن الثاني لإيجاد معادلات الحركة لوصف أنظمة فيزيائية مختلفة ، و لكن كما أوردنا سابقا هنالك بعض المسائل الفيزيائية التي يصعب حلها باستخدام قوانين نيوتن ، فعلى سبيل المثال ، جسيم يتحرك على سطح كرة ، أو خرزة تتحرك على سلك دائري أو حلزوني ، فمن أجل حل هذه الحالات قام الفيزيائيون بتطوير طريقتين مختلفتين لايجاد معادلات الحركة :

الطريقة الاولى : باستخدام معادلات لاجرانج (Lagrange's Equations) ،

الطريقة الثانية : باستخدام معادلات هاميلتون (Hamilton's Equations) .

في هذه الطرق نستخدم الإحداثيات المعمّمة (Generalized coordinates) التي سنعرّفها فيما بعد . إنّنا هنا لا نتعامل مع كميات متجهة كما هو الحال في قوانين نيوتن ، وإنما نتعامل مع كميات عددية تمكننا من حل مسائل صعبة .

2.2*الإحداثيات المعمّمة (Generalized Coordinates)

هي أقل عدد ممكن من الإحداثيات اللازمة لوصف نظام فيزيائي يحتوي على N جسيم و سوف نرمز لها بالرمز التالي :

$$q_1 \;,\; q_2 \;,\; q_3, \ldots\ldots, q_n \;; \qquad n \leq 3N$$

حيث n هي عدد درجات الحرية (Degrees of Freedom) للنظام ، و بعبارة أخرى نستطيع القول : إنّ عدد الإحداثيات المعمّمة هو عدد درجات الحرية للنظام الفيزيائي ، وقد تكون إحداثيات متعامدة (Cartesian Coordinates) (x,y,z) أو إحداثيات اسطوانية (Cylindrical Coordinates) $(r, \theta \;,\; z)$ أو إحداثيات كروية (Spherical Coordinates) $(r, \theta \;,\; \phi)$ أو أي إحداثيات أخرى مناسبة لوصف النظام الفيزيائي .

لتحديد نظام فيزيائي يحتوي على N جسيم نحتاج إلى 3N من الإحداثيات ، و إذا كان هناك m علاقة تربط هذه الإحداثيات مع بعضها البعض ، فإنّ عدد الاحداثيات المعممة يكون (3N- m) .

مثال (2.1)

جد الإحداثيات المعمّمة المناسبة لوصف حركة جسيم على سطح نصف كرة ، نصف قطرها R ؟

الحل :

بما أن الحركة مقيدة على السطح ، و باستخدام الإحداثيات المتعامدة نحصل على معادلة الكرة :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad ; \quad z \geq 0 \tag{2.1}$$

يوجد لدينا ثلاث إحداثيات وعلاقة واحدة ، أي أنّ :

$$N = 1 \quad , \quad m = 1$$

لذا يكون عدد الاحداثيات المعمّمة

$$3N - m = 3 - 1 = 2$$

وهو أقل عدد ممكن لوصف هذا النظام بحيث نستطيع أن نكتب إحدى الإحداثيات بدلالة الإحداثيات الأخرى على الشكل التالي :

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \tag{2.2}$$

نختار الإحداثيات المعمّمة بحيث تمكننا من تفسير النظام الفيزيائي بسهولة ، و تحديد معادلاته . و سوف نرمز لمشتقة الإحداثي المعمّم q_i بالنسبة للزمن بالرمز $\dot{q}_i$ و نسمّيها السرعة المعمّمة (Generalized velocity) .

من المفاهيم الفيزيائية التي سنعرضها في هذا الفصل القوى المعمّمة (Generalized forces) ، و قبل أن نُعرّفها سنأخذ بعين الاعتبار حركة جسيم في الإحداثيات المتعامدة x, y, z . إنّ علاقات هذه الإحداثيات بالإحداثيات المعمّمة تُعطى بواسطة معادلات التحويل (Transformation Equations)

$$x = x(q_1, q_2, q_3) \tag{2.3a}$$

$$y = y(q_1, q_2, q_3) \tag{2.3b}$$

$$z = z(q_1, q_2, q_3) \tag{2.3c}$$

و إذا اعتبرنا أنّ النظام تغير من الوضع الابتدائي (q_1, q_2, q_3) إلى الوضع المجاور $(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, q_3 + \delta q_3)$ فإنّ التغير في الاحداثيات المتعامدة يعطى بالعلاقات التالية :

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}\delta q_3 = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x}{\partial q_i}\delta q_i \tag{2.4a}$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3}\delta q_3 = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial y}{\partial q_i}\delta q_i \tag{2.4b}$$

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}\delta q_3 = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial z}{\partial q_i}\delta q_i \qquad (2.4c)$$

و إذا أردنا أنْ نعمّم هذا التغيير على نظام ميكانيكي يتكون من n إحداثيات معمّمة و عدد كبير من الجسيمات ، (و لنفترض أن الاحداثيات المعمّمة تغيرت من $(q_1, q_2, \ldots\ldots q_n)$ إلى $(q_1+\delta q_1, q_2+\delta q_2, \ldots\ldots q_n+\delta q_n)$ للجسيم i) فإنّ الإحداثيات المتعامدة تتغير من (x_i, y_i, z_i) إلى $(x_i+\delta x_i, y_i+\delta y_i, z_i+\delta z_i)$ بحيث إنّ الإزاحات $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ تُعطى بالعلاقات التالية :

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n}\delta q_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k \qquad (2.5a)$$

$$\delta y_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial y_i}{\partial q_n}\delta q_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\delta q_k \qquad (2.5b)$$

$$\delta z_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial z_i}{\partial q_n}\delta q_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\delta q_k \qquad (2.5c)$$

2.3* القوى المعمّمة (Generalized Forces)

إذا أثرت قوة $\vec{F}$ على جسيم و أزاحته بمقدار $\delta\vec{r}$ فإنّ مقدار الشغل الناتج هو :

$$\delta W = \vec{F}\cdot\delta\vec{r} = F_x\,\delta x + F_y\,\delta y + F_z\,\delta z \qquad (2.6)$$

حيث F_x, F_y, F_z المركبات العمودية للقوة $\vec{F}$ ، و بتعويض المعادلات (2.4) في المعادلة (2.6) و باعتبار أنّ عدد الاحداثيات المعمّمة هو n (أي أنّ قيم i تتغير من 1 إلى n) نحصل على :

$$\delta W = \sum_{k=1}^{n}\left(F_x\frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y\frac{\partial y}{\partial q_k} + F_z\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)\delta q_k = \sum_{k=1}^{n} Q_k\cdot\delta q_k \qquad (2.7)$$

حيث :

$$Q_k = \left(F_x\frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y\frac{\partial y}{\partial q_k} + F_z\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)$$

تُسمى القوة المعمّمة المصاحبة للإحداثي المعمّم q_k ، وإذا وُجد N من القوى $\vec{F}_i$ تؤثر على N من الجسيمات $(i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, N)$ فإنّ الشغل الكلي δW اللازم لإزاحة النظام بمقدار $\delta\vec{r}_i$ يُعطى بالعلاقة التالية :

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} F_{x_i}\delta x_i + F_{y_i}\delta y_i + F_{z_i}\delta z_i \tag{2.8}$$

و باستخدام المعادلات (2.5) نحصل على :

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(F_{x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k\right] \tag{2.9}$$

و من الممكن أن نكتب المعادلة السابقة على الصيغة التالية :

$$\delta W = \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(F_{x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k\right] \tag{2.10}$$

و بإختصار :

$$\delta W = \sum_{k=1}^{n} Q_k \delta q_k \tag{2.11}$$

حيث :

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N}\left(F_{x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)$$

تُسمّى القوى المعمّمة المصاحبة للإحداثيات المعمّمة q_k .

مثال (2.2)

جسيم كتلته m يتحرك في المستوى $x\,y$ ، باستخدام الإحداثيات القطبية $(r\ ,\ \theta)$ على اعتبار أنها إحداثيات معمّمة احسب ما يلي :

1) الازاحة $\delta x\ ,\ \delta y$

2) القوى المعمّمة على اعتبار أنّ القوة $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$ أثرت على الجسيم .

الحل :

$$q_1 = r \quad , \quad q_2 = \theta$$

$$x = x(r, \theta) = r\cos\theta$$

$$y = y(r, \theta) = r\sin\theta$$

أولا – إنّ التغير في الإحداثيات المتعامدة يُحسب كما يلي :

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial r}\delta r + \frac{\partial x}{\partial \theta}\delta\theta = \cos\theta\ \delta r - r\sin\theta\ \delta\theta \tag{2.13a}$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial r}\delta r + \frac{\partial y}{\partial \theta}\delta\theta = \sin\theta\ \delta r + r\cos\theta\ \delta\theta \tag{2.13b}$$

ثانيا – القوى المعمّمة في اتجاهين تُعطى بالعلاقة التالية :

$$Q_k = F_x \frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_k}$$

حيث :

$$Q_1 = Q_r \, , \, Q_2 = Q_\theta$$

$$Q_r = F_x \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \frac{\partial y}{\partial r} = F_x \cos\theta + F_y \sin\theta = F_r \qquad (2.14a)$$

$$Q_\theta = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta} = - r F_x \sin\theta + r F_y \cos\theta = r F_\theta \qquad (2.14b)$$

مثال (2.3)

أدرس المثال السابق في الأبعاد الثّلاثة باستخدام الإحداثيات الإسطوانية كإحداثيات معمّمة .

الحل :

$$q_1 = r \; , \; q_2 = \theta \; , \; q_3 = z \; , \; x = r\cos\theta \; , \; y = r\sin\theta \; , \; z = z$$

أولا -التغير في الإحداثيات المتعامدة يُعطى بالعلاقات التالية :

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial r}\delta r + \frac{\partial x}{\partial \theta}\delta\theta + \frac{\partial x}{\partial z}\delta z = \cos\theta\,\delta r - r\sin\theta\,\delta\theta \qquad (2.15a)$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial r}\delta r + \frac{\partial y}{\partial \theta}\delta\theta + \frac{\partial y}{\partial z}\delta z = \sin\theta\,\delta r + r\cos\theta\,\delta\theta \qquad (2.15b)$$

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial r}\delta r + \frac{\partial z}{\partial \theta}\delta\theta + \frac{\partial z}{\partial z}\delta z = \delta z \qquad (2.15c)$$

ثانيا - القوى المعمّمة هي :

$$Q_1 = Q_r \; , \; Q_2 = Q_\theta \; , \; Q_3 = Q_z$$

نجدها بنفس الطريقة :

$$Q_r = F_r \; , \; Q_\theta = r F_\theta \; , \; Q_z = F_z$$

2.4* الأنظمة المحافظة (Conservative Systems)

إذا كانت محصلة القوى المؤثرة على جسيم أوعلى مجموعة جسيمات يمكن اشتقاقها من دالة طاقة الوضع ، فإنّ الأنظمة تُسمى أنظمةً محافظة ، و غير ذلك تكون غير محافظة ، بعبارة أخرى تسمى القوة $\vec{F}$ قوة محافظة إذا كان :

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \quad \text{أو} \quad \vec{F} = -\nabla V$$

حيث V دالة طاقة الوضع بدلالة إحداثيات الموضع ، أي أنّ طاقة الوضع تُعطى بالدالة التالية :

$$V = V(x, y, z)$$

إذن مركبات القوة هي :

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

و بالتالي فإنّ القوى المعمّمة تُعطى كما يلي :

$$Q_k = F_x \frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_k} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_k}$$

و بتعبير آخر :

$$Q_k = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_k} \right) = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (2.16)$$

و هذا يعني أنّه في حالة الأنظمة المحافظة تكون مركبة القوة المعمّمة مساوية لسالب مشتقة دالة الوضع بالنسبة للإحداثي المعمّم المقابل لهذه المركبة (q_k) .

2.5* الأنظمة المقيدة (Constrained Systems)

هنالك نوعان من الأنظمة المقيدة :

1) الأنظمة المقيدة تقييدا تاما (Holonomic constraints) : في هذه الحالة القيد عبارة عن علاقة بين الإحداثيات ، يمكن كتابتها على الصيغة :

$$f(q_k, t) = 0 \qquad (2.17)$$

و من الامثلة على هذا النوع من القيود الاجسام الجاسئة (Rigid bodies) حيث إنّ المسافة ثابتة بين أي نقطتين على الجسم

$$(r_i - r_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$$

ومثال آخر ، حركة جسم على سطح كرة نصف قطرها a . في هذه الحالة معادلة القيد هي :

$$r - a = 0$$

2) الأنظمة المقيدة تقْييدا غير تام (Non - holonomic constraints) و التي لا يمكن التعبير عنها بالمعادلة (2.17) .

2.6* معادلات لاجرانج (Lagrange's equations)

إنّ الطاقة الحركية لجسيم كتلته m يتحرك في الاتجاهات الثلاثة - في الإحداثيات المتعامدة - تُعطى بالشكل التالي :

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \qquad (2.18)$$

و إذا كانت الإحداثيات المعمّمة هي $q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots, q_n$ فإنّ معادلات التحويل إلى الإحداثيات المعمّمة تُعطى بالعلاقات التالية :

$$x = x(q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots\ldots, q_n) \tag{2.19a}$$

$$y = y(q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots\ldots, q_n) \tag{2.19b}$$

$$z = z(q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots\ldots, q_n) \tag{2.19c}$$

إنّ مشتقة الإحداثي x بالنسبة للزمن تأخذ الصورة التالية :

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial x}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial x}{\partial q_n}\dot{q}_n$$

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x}{\partial q_k}\dot{q}_k \tag{2.20}$$

و باشتقاق طرفي المعادلة (2.20) بالنسبة إلى $\dot{q}_\ell$ نحصل على ما يلي :

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_\ell} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x}{\partial q_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_\ell} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x}{\partial q_k}\delta_{k\ell} = \frac{\partial x}{\partial q_\ell} \tag{2.21}$$

حيث $\delta_{k\ell}$ تعرف بالعلاقة التالية :

$$\delta_{k\ell} = \begin{cases} 1 & \ell = k \\ 0 & \ell \neq k \end{cases}$$

و بنفس الطريقة نثبت أنّ :

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_\ell} = \frac{\partial y}{\partial q_\ell} \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_\ell} = \frac{\partial z}{\partial q_\ell} \tag{2.23}$$

و الآن نشتق طاقة الحركة المعطاة في العلاقة (2.18) بالنسبة الى $\dot{q}_k$ على النحو التالي :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = m\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_k} + \dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_k} + \dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_k}\right) \tag{2.24}$$

و باستخدام المعادلات السابقة نكتب المعادلة (2.24) كما يلي :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = m\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \dot{y}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \dot{z}\frac{\partial z}{\partial q_k}\right) \tag{2.25}$$

و بأخذ المشتقة الزمنية لهذه المعادلة نحصل على :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) = \Big[\, m\,\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_k} + m\,\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)$$

$$+ m\,\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_k} + m\,\dot{y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right) + m\,\ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_k} + m\,\dot{z}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)\Big]$$

و التي تُكتب على النحو :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)=\left[F_x\frac{\partial x}{\partial q_k}+F_y\frac{\partial y}{\partial q_k}+F_z\frac{\partial z}{\partial q_k}\right.$$
$$\left.+m\,\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_k}+m\,\dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_k}+m\,\dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial q_k}\right] \quad (2.26)$$

حيث إنّ :

$$F_x=m\,\ddot{x} \text{ و } F_y=m\,\ddot{y} \text{ و } F_z=m\,\ddot{z}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_k}\ ,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_k}\ ,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial \dot{z}}{\partial q_k}$$

و بما أنّ :

$$m\,\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_k}+m\,\dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_k}+m\,\dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial q_k}=\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{y}^2+\frac{1}{2}m\dot{z}^2\right)=\frac{\partial T}{\partial q_k}$$

فإنّ المعادلة (2.26) تكتب على الشكل التالي :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k \quad ,\quad k=1,2,3,\ldots\ldots,n \qquad (2.27)$$

حيث :

$$Q_k=F_x\frac{\partial x}{\partial q_k}+F_y\frac{\partial y}{\partial q_k}+F_z\frac{\partial z}{\partial q_k}$$

هذه المعادلات التفاضلية (2.27) تُسمى معادلات لاجرانج التي تصف حركة الاجسام في أيٍّ نظام فيزيائي له العدد n من درجات الحرية .

وفي حالة القوى المحافظة

$$Q_k=-\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (2.28)$$

وطاقة الوضع V لاتعتمد على السرعة أيْ أنّ :

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}=0$$

وهذا يعني أنّ :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_k} \qquad (2.29)$$

و بتعويض قيمة Q_k و $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$ -باستخدام المعادلتين (2.28) و (2.29) - في المعادلة (2.27) نحصل على معادلة لاجرانج التي تصف حركة جسيم في مجال قوة محافظة

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \qquad (2.30)$$

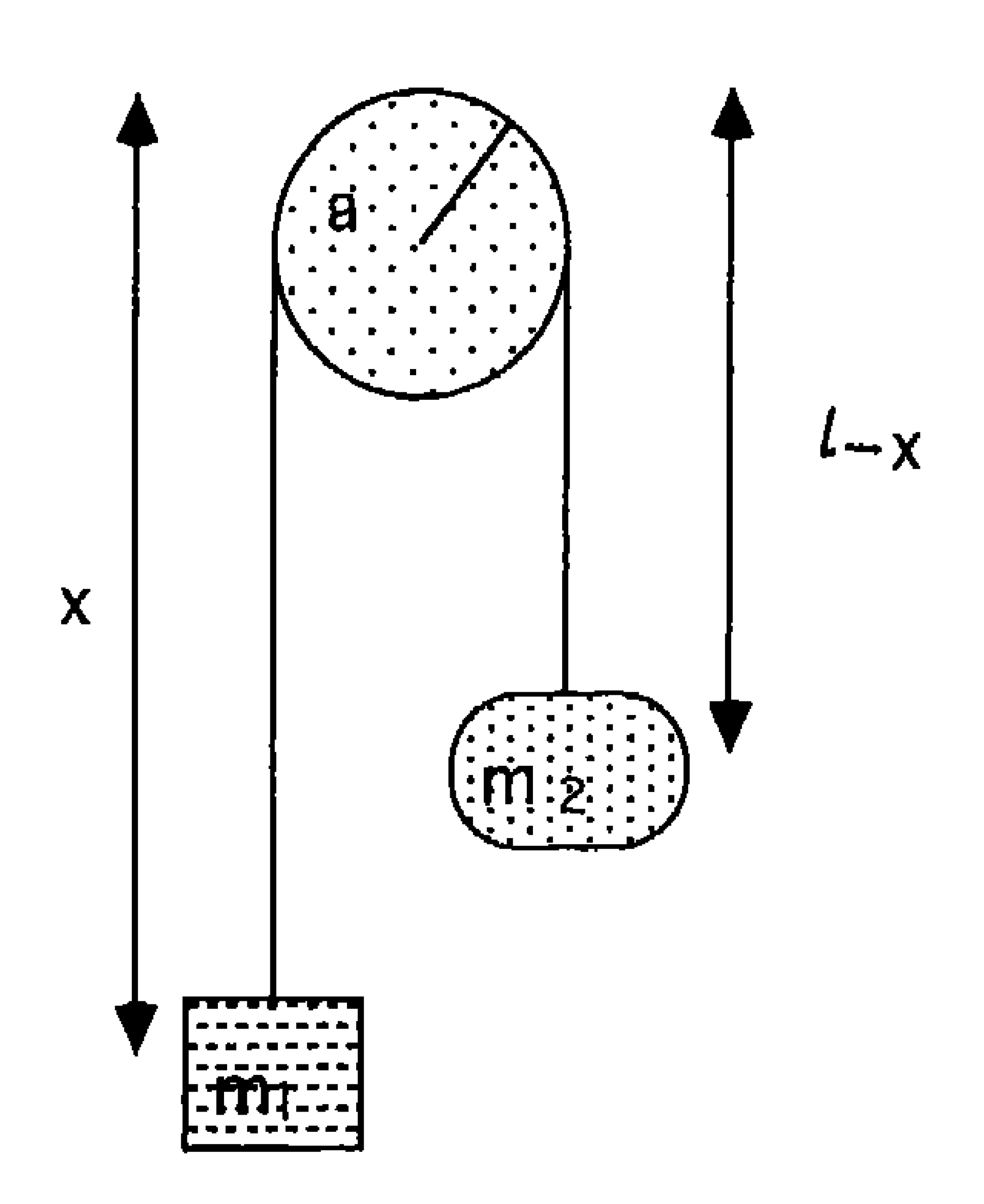
حيث $L=T-V$ تمثل دالة لاجرانج .

وفي حالة القوى غير المحافظة تُعطى معادلات لاجرانج بالعلاقة التالية :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k \qquad (2.31)$$

مثال (2.4)

جد التسارع باستخدام معادلات لاجرانج ، لآلة أتوود الموضحة في الشكل (2.1) ، والتي تتكون من بكرة نصف قطرها a و عزم قصورها الذاتي I حول محور يمر في مركزها وعمودي على مستواها .



الشكل (2.1) : آلة أتوود

الحل :

طاقة الحركة لهذا النظام هي:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

حيث ω السرعة الزاوية للبكرة ، و v_1 و v_2 هما سرعتا الكتلتين m_1 و m_2 على الترتيب .

$$v_1 = \dot{x} \ , \ v_2 = -\dot{x} \ , \ \dot{x} = a\,\omega$$

إذن طاقة الحركة تصبح :

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}\right)\dot{x}^2$$

وطاقة الوضع لهذا النظام هي :

$$V = -m_1 g x - m_2 g (l - x)$$

الآن دالة لاجرانج تُعطى بالعلاقة التالية :

$$L = T - V = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}\right)\dot{x}^2 + m_1 g\, x + m_2\, g\,(l - x)$$

في هذه الحالة يوجد إحداثي معمّم واحد ، وهذا يعني أنّ هناك معادلة لاجرانج واحدة ، وبما أنّ القوى محافظة تُستخدم العلاقة (2.30) فنحصل على :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

و بتعويض دالة لاجرانج نجد أنّ:

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}\right)\ddot{x} - g\left(m_1 - m_2\right) = 0$$

وهذه المعادلة تحدد تسارع النظام

$$\ddot{x} = \frac{g\left(m_1 - m_2\right)}{m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}}$$

وإذا أُهمل عزم القصور الذاتي للبكرة فإن التسارع يصبح:

$$\ddot{x} = \frac{g\left(m_1 - m_2\right)}{m_1 + m_2}$$

و هذه نفس النتيجة التي نحصل عليها باستخدام قانون نيوتن الثاني للحركة .

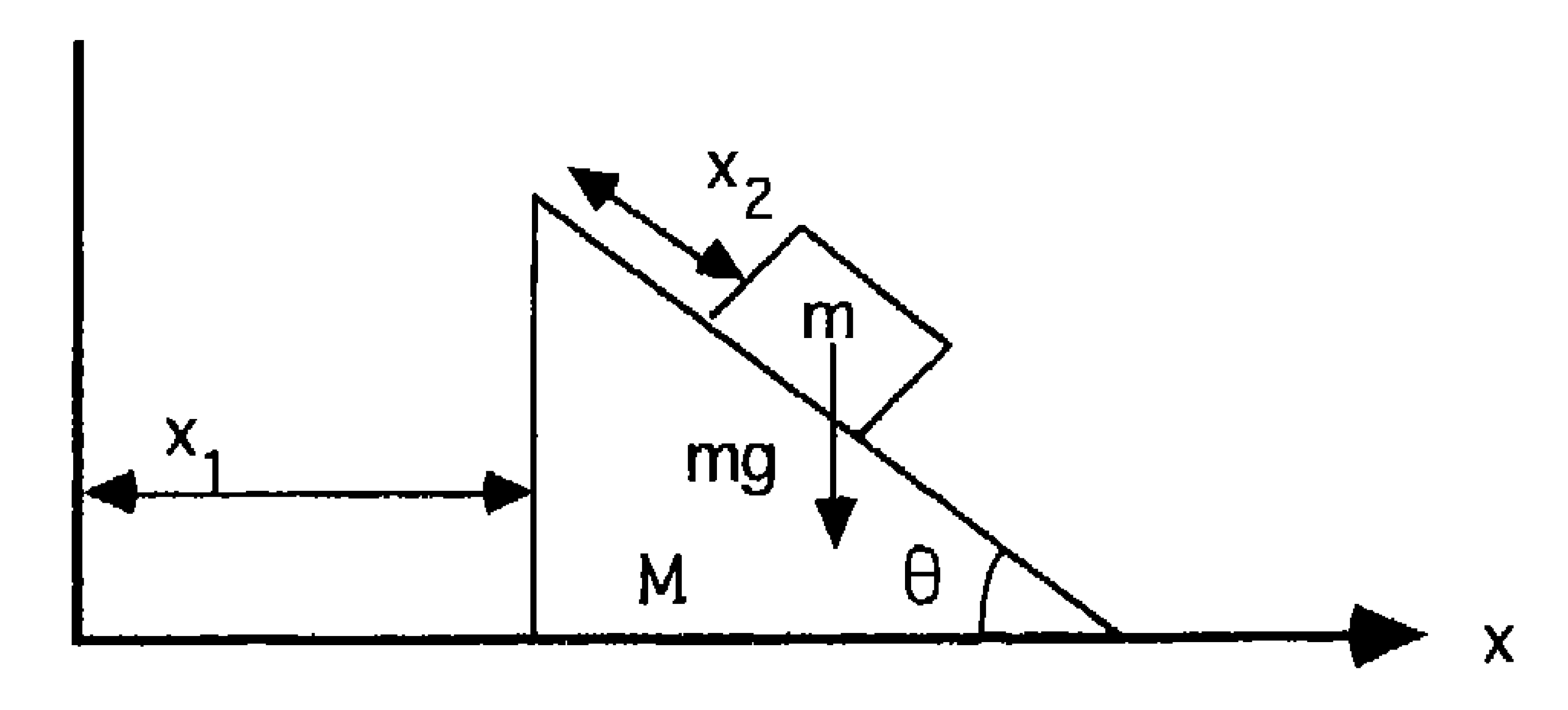
مثال (2.5)

سطح مائل كتلته M يميل عن الافق بزاوية مقدارها θ كما هو موضح في الشكل (2.2) ، و يتحرك في المستوى الافقي بدون إحتكاك . وجسم آخر كتلته m يتحرك على هذا السطح بدون إحتكاك أيضا . جد معادلات لاجرانج لحركة السطح المائل و الجسم ؟

الحل : طاقة الحركة للنظام هي :

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

حيث سرعة الكتلة m هي: $\vec{v} = \vec{\dot{x}}_1 + \vec{\dot{x}}_2 \Rightarrow v^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\,\dot{x}_1 \dot{x}_2 \cos\theta$



الشكل (2.2) : سطح مائل يتحرك أفقيا ، ينزلق عليه جسم آخر

إذن :

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 \cos\theta \right)$$

و طاقة الوضع للنظام هي :

$$V = - m g x_2 \sin\theta$$

و دالة لاجرانج :

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 \cos\theta \right) + m g x_2 \sin\theta$$

الإحداثيات المعمّمة هي : x_1 و x_2 . و من الجدير بالذكر هنا أن الزاوية θ ثابتة وليست إحداثي معمّم . و باستخدام المعادلات (2.30) نحصل على معادلتي الحركة :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow M \ddot{x}_1 + m \left(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 \cos\theta \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \ddot{x}_2 + \ddot{x}_1 \cos\theta - g \sin\theta = 0$$

ومن الممكن حل هاتين المعادلتين للحصول على التسارعات التالية :

$$\ddot{x}_1 = \frac{- g \sin\theta \cos\theta}{\frac{M + m}{m} - \cos^2\theta}$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{g \sin\theta}{1 - \left[\frac{m \cos^2\theta}{M + m} \right]}$$

مثال (2.6)

خرزة كتلتها m تنزلق بدون احتكاك على سلك دائري (حلقة) نصف قطره a ، إذا كان هذا السلك يدور في المستوى الافقي بسرعة زاويه مقدارها ω حول محور يمر في النقطة 0 كما في الشكل (2.3) . أدرس حركة الخرزة و جد رد فعل السلك ؟

الحل :

بما أنّ الحلقة في وضع أفقي ، لذلك تكون الطاقة الحركية $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ ،

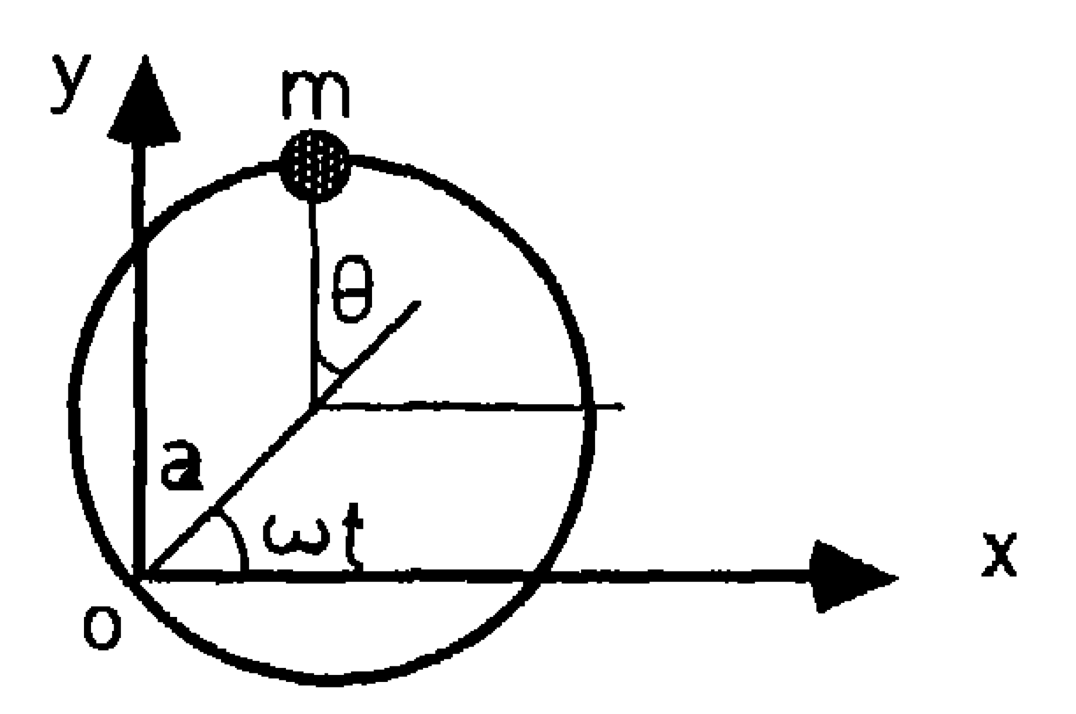
و نستطيع أنْ نعتبر طاقة الوضع تساوي صفرا ، و بما أنّ الخرزة تتحرك على سلك دائري فإنّنا سنستخدم الإحداثيات القطبية . من الشكل نجد :

$$x = a \cos\omega t + a \cos(\omega t + \theta) \quad , \quad y = a \sin\omega t + a \sin(\omega t + \theta)$$

إذن :

$$\dot{x} = -a\,\omega \sin \omega t - \left[a \sin(\omega t + \theta)\right](\omega + \dot{\theta})$$
$$\dot{y} = a\,\omega \cos \omega t + \left[a \cos(\omega t + \theta)\right](\omega + \dot{\theta})$$

لذلك تكتب طاقة الحركة كما يلي :



الشكل (2.3) : خرزة تنزلق على سلك يدور في المستوى الأفقي بسرعة زاوية ω

$$T = \frac{1}{2} m \Big[a^2 \omega^2 \left(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t\right) + a^2(\omega + \dot{\theta})^2 \left\{\sin^2(\omega t + \theta) + \cos^2(\omega t + \theta)\right\}$$
$$+ 2a^2\omega(\omega + \dot{\theta}) \left\{\cos(\omega t + \theta)\cos \omega t + \sin(\omega t + \theta)\sin \omega t\right\} \Big]$$

بما أنّ :

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad \text{و} \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

إذن :

$$T = \frac{1}{2} m \left[a^2 \omega^2 + a^2(\omega + \dot{\theta})^2 + 2a^2 \omega(\omega + \dot{\theta})\cos \theta \right]$$

يوجد لدينا إحداثي معمّم واحد هو θ ، لذلك يوجد لدينا معادلة لاجرانج واحدة . و باستخدام العلاقة (2.30) فإنّها تُعطى كما يلي :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

حيث دالة لاجرانج تساوي الطاقة الحركية في هذا المثال ، و بتعويض قيمة T نحصل على :

$$\frac{d}{dt}\left[m a^2(\omega + \dot{\theta}) + m a^2 \omega \cos \theta\right] + m a^2 \omega(\omega + \dot{\theta})\sin \theta = 0$$

و بإجراء الإشتقاق بالنسبة للزمن نجد :

$$m a^2\left(\ddot{\theta} - \omega \dot{\theta} \sin\theta\right) + m a^2 \omega^2 \sin \theta + m a^2 \omega \dot{\theta} \sin\theta = 0$$

أي أنّ :

$$m a^2 \ddot{\theta} + m a^2 \omega^2 \sin \theta = 0$$

و بالقسمة على $m a^2$ نحصل على المعادلة التالية :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0$$

و إذا كانت θ صغيرة جدا ، فإنّ حركة الخرزة ستكون حركة توافقية بسيطة .

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

علما بأنّ :

$$\sin\theta \cong 0$$

و لإيجاد رد الفعل نفترض أنّ بعد الخرزة عن مركز الدائرة متغير و يساوي r ، و من ثمّ نجد معادلة لاجرانج بالنسبة إلى r و بعد ذلك نعوّض القيم على النحو التالي :

$$r = 0 \, , \; \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$x = a\cos\omega t + r\cos(\omega t + \theta) \, , \; y = a\sin\omega t + r\sin(\omega t + \theta)$$

و مشتقاتها :

$$\dot{x} = -a\,\omega\sin\omega t + \dot{r}\cos(\omega t + \theta) - r\sin(\omega t + \theta)(\omega + \dot{\theta})$$

$$\dot{y} = a\,\omega\cos\omega t + \dot{r}\sin(\omega t + \theta) + r\cos(\omega t + \theta)(\omega + \dot{\theta})$$

إذن ستأخذ طاقة الحركة الصورة التالية :

$$T = \frac{1}{2}m\Big\{a^2\omega^2\sin^2\omega t + \dot{r}^2\cos^2(\omega t + \theta) + r^2\sin^2(\omega t + \theta)(\omega + \dot{\theta})^2 -$$

$$2a\omega\dot{r}\sin\omega t\cos(\omega t + \theta) + 2a\omega r\sin\omega t\sin(\omega t + \theta)(\omega + \dot{\theta}) -$$

$$2r\dot{r}\cos(\omega t + \theta)\sin(\omega t + \theta)(\omega + \dot{\theta}) + a^2\omega^2\cos^2\omega t + \dot{r}^2\sin^2(\omega t + \theta) +$$

$$r^2\cos^2(\omega t + \theta)(\omega + \dot{\theta})^2 + 2a\omega\dot{r}\cos\omega t\sin(\omega t + \theta) + 2a\omega r\cos\omega t\cos(\omega t + \theta)(\omega + \dot{\theta})$$

$$+ 2r\dot{r}\sin(\omega t + \theta)\cos(\omega t + \theta)(\omega + \dot{\theta})\Big\}$$

و بتجميع هذه الحدود نحصل على طاقة الحركة على الصيغة التالية :

$$T = \frac{1}{2}m\left\{a^2\omega^2 + \dot{r}^2 + r^2(\omega + \dot{\theta})^2 + 2a\omega\dot{r}\sin\theta + 2a\omega r(\omega + \dot{\theta})\cos\theta\right\}$$

علماً بأنّ :

$$\cos(A \pm B) = -(\cos A\cos B \pm \sin A\sin B)$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$$

وباستخدام معادلات لاجرانج نحصل على :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r = R$$

حيث R ردُّ فعل السلك الدائري للخرزة . لكن

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} + m a\omega\sin\theta \;\text{ و }\; \frac{\partial T}{\partial r} = m r(\dot{\theta} + \omega)^2 + m a\varphi\cos\theta(\dot{\theta} + \omega)$$

لذلك فإن معادلة لاجرانج للحركة في البعد r تصبح كالاتي :

$$m\ddot{r} + m a\omega\cos\theta\,\dot{\theta} - m r(\omega + \dot{\theta})^2 - m a\omega^2\cos\theta - m a\omega\dot{\theta}\cos\theta = R$$

نعوض الآن $r = a$ و $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ فنحصل على :

$$-m\, a(\omega+\dot{\theta})^2 - m a \omega^2 \cos\theta = R$$

حيث R رد الفعل .

مثال (2.7)

سلك مثني على شكل حلزوني بحيث يحقق العلاقتين $r = a$ و $z = k\,\theta$ في الإحداثيات الإسطوانية ، علماً بأنّ a و k ثابتان . أدرس حركة خرزة على هذا السلك إذا كانت الخرزة تتحرك بدون إحتكاك و لكن تؤثر عليها قوة جذب $\vec{F}$ باتجاه مركز السلك تتناسب طرديا مع بعد الخرزة عن المركز ؟

الحل :

تُعطى طاقة الحركة في الاحداثيات الاسطوانية بالعلاقة التالية :

$$T = \frac{1}{2}\, m\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right)$$

لكن :

$$z = k\,\theta$$

إذن مشتقتها بالنسبة للزمن :

$$\dot{z} = k\,\dot{\theta}$$

وكذلك :

$$r = a$$

و مشتقتها بالنسبة للزمن :

$$\dot{r} = 0$$

نعوض قيم $\dot{z}$ ، $\dot{r}$ و r فنجد أنّ طاقة الحركة تساوي :

$$T = \frac{1}{2}\, m\left(k^2\,\dot{\theta}^2 + a^2\,\dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{2}\, m\left(k^2 + a^2\right)\dot{\theta}^2$$

قوة الجذب المركزية التي تؤثر على الخرزة هي :

$$\vec{F} = -\,\alpha\,\vec{\rho}$$

حيث α ثابت التناسب ، و $\vec{\rho}$ متجه الموقع للخرزة و قيمته تعطى بالعلاقة :

$$\rho^2 = r^2 + z^2 = a^2 + k^2\theta^2$$

طاقة الوضع للخرزة هي :

$$V = -\int \vec{F}.\, d\vec{\rho} = -\int -\,\alpha\,\vec{\rho}\,.\, d\vec{\rho} = +\int (\alpha\,\rho)\, d\rho = +\frac{1}{2}\,\alpha\,\rho^2 = +\,\frac{1}{2}\,\alpha\,(a^2 + k^2\theta^2)$$

دالة لاجرانج هي :

$$L = \frac{1}{2}\, m\,(a^2 + k^2)\,\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\,\alpha\,(a^2 + k^2\theta^2)$$

معادلة لاجرانج تُعطى بالعلاقة التالية :

$$m(a^2+k^2)\ddot{\theta} + \alpha k^2 \theta = 0$$

و منها :

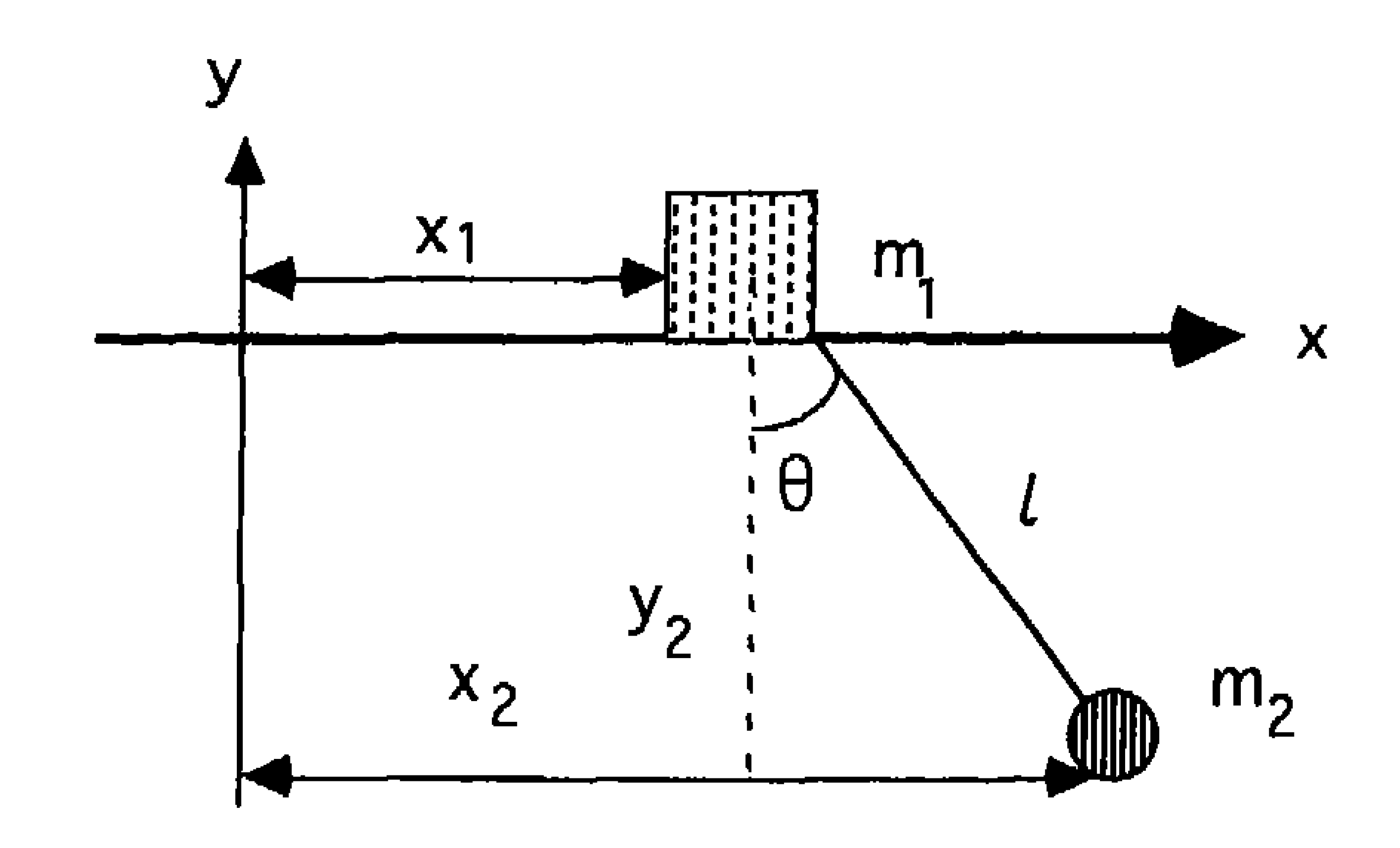
$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha k^2}{m(a^2+k^2)}\theta = 0$$

إنّ هذه المعادلة تبين أن الخرزة تتحرك حركة توافقية بسيطة بتردد ω مقداره :

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha k^2}{m(a^2+k^2)}}$$

مثال (2.8)

الشكل (2.4) يتكون من بندول كتلته m_2 ، معلق بصندوق صغير كتلته m_1 يتحرك على المحور الافقي x بدون إحتكاك . على اعتبار أنّ البندول يتحرك في المستوى xy ، جد دالة لاجرانج و معادلات الحركة للنظام ؟ ثُم جد حل معادلات الحركة في حالة الاهتزازات الصغيرة ؟



الشكل (2.4) : بندول معلق بصندوق متحرك

الحل :

الإحداثيات المعمّمة في هذه الحالة x_1 و θ . طاقة الحركة للنظام هي :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right)$$

حيث :

$$x_2 = l\sin\theta + x_1 \implies \dot{x}_2 = l\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x}_1$$

$$y_2 = l\cos\theta \implies \dot{y}_2 = -l\dot{\theta}\sin\theta$$

فتكون طاقة الحركة و طاقة الوضع للنظام على الترتيب :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{x}_1\cos\theta + \dot{x}_1^2\right)$$

$$V = -m_2 g l \cos\theta$$

لذلك تكون دالة لاجرانج كما يلي :

$$L=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\left(\ell^2\dot{\theta}^2+2\ell\dot{\theta}\dot{x}_1\cos\theta+\dot{x}_1^2\right)+m_2 g\ell\cos\theta$$

الإحداثيات المعمّمة هنا هي θ و x_1 لذلك يوجد معادلتا حركة ، معادلة لاجرانج الأولى

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_1}=0$$

و تحسب المشتقات الجزئية لدالة لاجرانج كما يلي :

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_1}=m_1\dot{x}_1+m_2\dot{x}_1+m_2\ell\cos\theta\ \dot{\theta}\ ,\ \frac{\partial L}{\partial x_1}=0$$

إذن تأخذ معادلة لاجرانج الأولى الشكل التالي :

$$(m_1+m_2)\ddot{x}_1+m_2\ell\cos\theta\ \ddot{\theta}-m_2\ell\sin\theta\ \dot{\theta}^2=0$$

و معادلة لاجرانج الثانية هي :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

و المشتقات الجزئية لها :

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=m_2\ell^2\ \dot{\theta}+m_2\ell\cos\theta\ \dot{x}_1\ ,\ \frac{\partial L}{\partial\theta}=-\ m_2\ell\dot{x}_1\ \dot{\theta}\ \sin\theta\ -\ m_2\ell g\sin\theta$$

و بالتعويض في دالة لاجرانج نحصل على :

$$m_2\ell^2\ \ddot{\theta}+m_2\ell\cos\theta\ \ddot{x}_1-\ m_2\ell\dot{x}_1\dot{\theta}\ \sin\theta+\ m_2\ell\dot{x}_1\dot{\theta}\ \sin\theta\ +m_2\ell g\sin\theta\ =0$$

$$m_2\ell^2\ \ddot{\theta}+m_2\ell\cos\theta\ \ddot{x}_1\ +m_2\ell g\sin\theta\ =0$$

و في حالة الاهتزازات الصغيرة ، نعتبر :

$$\cos\theta\cong 1\ ,\ \sin\theta\ \cong\theta\ ,\ \dot{\theta}^2=0$$

فتصبح معادلات الحركة كما يلي :

$$(m_1+m_2)\ddot{x}_1+\ m_2\ell\ddot{\theta}\ =0$$

$$m_2\ell^2\ \ddot{\theta}+m_2\ell\ddot{x}_1=-m_2\ell g\theta$$

و منهما نستطيع إيجاد $\ddot{x}_1$ بدلالة $\ddot{\theta}$ من المعادلة الأولى :

$$\ddot{x}_1=\frac{-\ m_2\ell\ddot{\theta}}{m_1+m_2}$$

و إذا أردنا الحصول على $\ddot{\theta}$ بدلالة θ نعوض في المعادلة الثانية :

$$m_2\ell^2\ \ddot{\theta}-\frac{m_2^2\ell^2\ \ddot{\theta}}{m_1+m_2}=-m_2\ell g\theta$$

و بصيغة أخرى :

$$\ddot{\theta}\left[\ell - \frac{m_2 \ell}{m_1 + m_2}\right] + g\,\theta = 0$$

وبتبسيطها نحصل على :

$$\ddot{\theta}\,\frac{m_1 \ell}{m_1 + m_2} + g\,\theta = 0$$

فتكون الصورة النهائية لها :

$$\ddot{\theta} + \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 \ell}\,\theta = 0$$

و هي معادلة الحركة التوافقية البسيطة وحلها هو :

$$\theta = A \sin(\omega t + \delta)$$

حيث التردد الزاوي ω يساوي :

$$\omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)\,g}{m_1 \ell}}$$

و الآن من السهل إيجاد الإحداثي x_1 و هو :

$$x_1 = c_1 t + c_2 - \frac{m_2 \ell\, \theta}{m_1 + m_2}$$

حيث c_1 و c_2 ثابتان .

مثال(2.9)

قضيب منتظم طوله L و كتلته M ، أحد طرفيه مثبت عند النقطة 0 (كما في الشكل (2.5)) و الطرف الآخر مربوط بمركزقرص رقيق كتلته M ونصف قطره R، يتأرجح القضيب في المستوى العمودي ، والقرص يتأرجح ويدور بنفس الوقت . جد معادلات الحركة لهذا النظام ؟

الحل :

طاقة الحركة الناتجه عن تأرجح القضيب و القرص على التوالي :

$$T_1 = \frac{1}{2} I_{rod}\,\dot{\theta}^2$$

حيث θ الزاوية التي يصنعها البندول مع المحور الرأسي ، و $I_{rod} = \frac{1}{3}ML^2$ عزم قصور القضيب :

$$T_2 = \frac{1}{2} I_{ds}\,\dot{\theta}^2$$

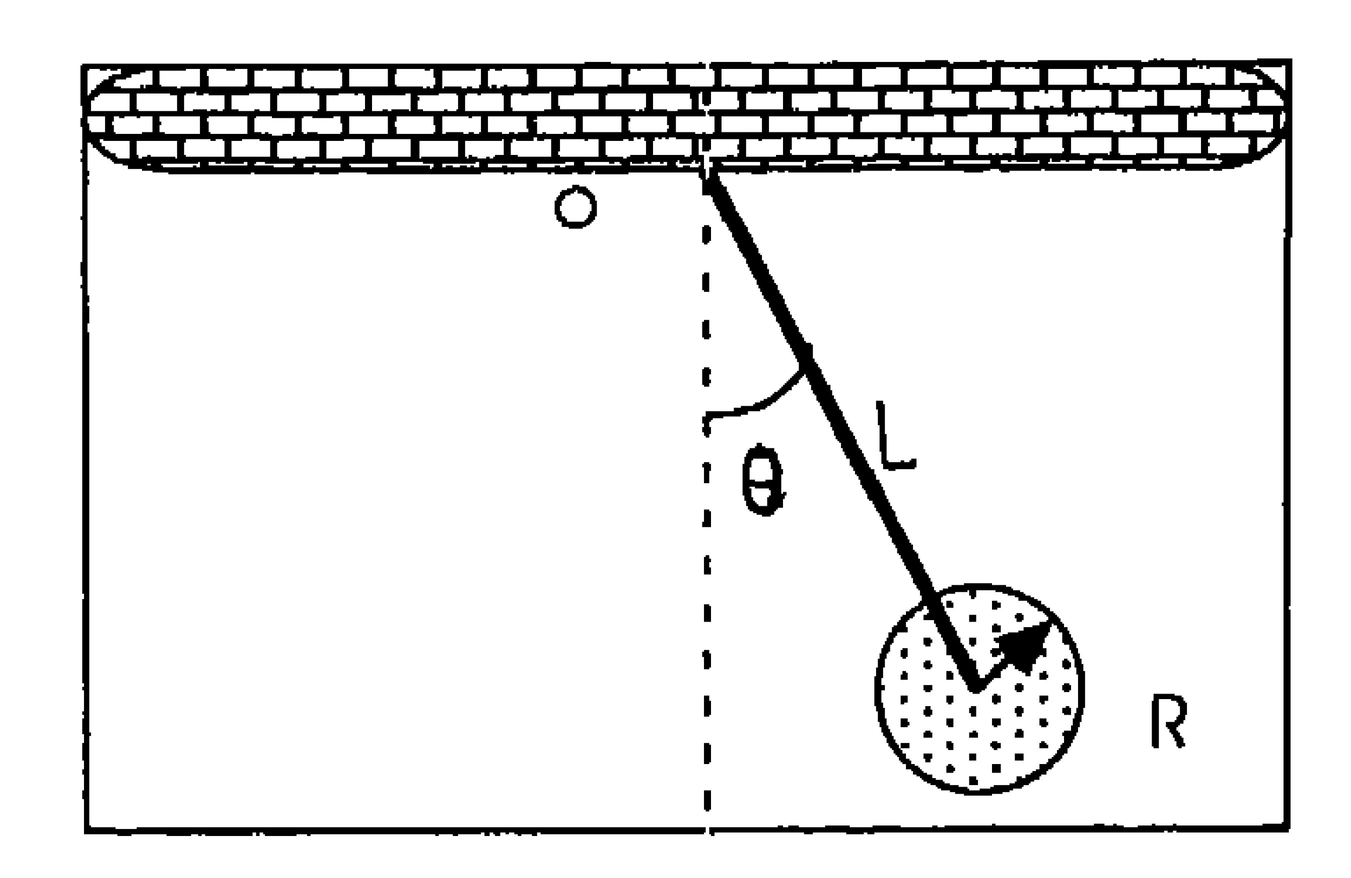
حيث $I_{ds} = ML^2$ عزم قصور القرص الناتج عن تأرجحه .

وطاقة الحركة الناتجة عن دوران القرص هي :

$$T_3 = \frac{1}{2} I_{dr}\,\dot{\Phi}^2$$

حيث $I_{dr} = \frac{1}{2} MR^2$ عزم القصور الناتج عن دوران القرص حول مركزه ، فتكون الطاقة الحركية الكلية على النحو التالي :

$$T = \frac{1}{6} ML^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} ML^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} MR^2 \dot{\Phi}^2 = \frac{2}{3} ML^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} MR^2 \dot{\Phi}^2$$



الشكل (2.5) : قضيب و قرص يتأرجحان

وطاقة الوضع للقضيب V_1 هي :

$$V_1 = \frac{MgL}{2} (1 - \cos\theta)$$

وطاقة الوضع للقرص V_2 هي :

$$V_2 = MgL (1 - \cos\theta)$$

فتكون طاقة الوضع الكلية V هي :

$$V = \frac{3\,MgL}{2} (1 - \cos\theta)$$

إذن تعطى دالة لاجرانج بالعلاقة التالية :

$$L = \frac{2}{3} ML^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} MR^2 \dot{\Phi}^2 - \frac{3}{2} MgL (1 - \cos\theta)$$

و باستخدام معادلات لاجرانج (2.30) نحصل على معادلتي الحركة :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{9}{8}\frac{g}{L}\right) \sin\theta = 0$$

$$\ddot{\Phi} = 0$$

تبين المعادلة الأولى أنها معادلة حركة توافقية بسيطة ، إذا كانت الزاوية θ صغيرة . ترددها الزاوي ω يساوي

$$\omega = \sqrt{\frac{9}{8}\frac{g}{L}}$$

و تبين المعادلة الثانية أنّ السرعة $\dot{\Phi}$ تساوي مقدارا ثابتا .

2.7 * معادلات لاجرانج للأنظمة المقيدة

تحدثنا في بداية هذا الفصل عن القيود تامّة ال‍ ‍قييد ، و عن غير التامّة . وهنا نود أنْ نبين كيفية التعامل مع هذه القيود ‍ ‍-خالها إلى معادلات لاجرانج ، و من ثمّ كيفية الاستفادة منها لإيجاد القوى المسببة لهذه القيود مثل قوة رد الفعل ، أو قوة الاحتكاك .

إذا كانت القيود تحتوي على السرعة فيمكن التعبير عنها ، بما يلي :

$$f_\alpha(q_i\ ,\ \dot{q}_i\ ,\ t)=0 \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1, 2, 3, \ldots\ldots m \\ i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n \end{array} \right. \quad m<n$$

و تعتبر قيود غير تامة التقييد إلا إذا كان من الممكن تكاملها و إيجاد بعض الإحداثيات بدلالة الأخرى . اعتبر القيد التالي :

$$\sum_{i=1}^{n} A_i\ \dot{q}_i\ + B\ = 0$$

فهذا القيد غير تام التقييد ؛ لأنّه لا يمكن تكامله إلا إذا اعتبرنا أنّ :

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}\quad ,\quad B = \frac{\partial f}{\partial t}\quad ,\quad f = f\,(q_i, t)$$

عندها يمكن إعادة صياغة هذا القيد على الشكل التالي :

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

و هذا يكافىء :

$$\frac{df}{dt} = 0$$

و بالتالي :

$$f\,(q_i, t)\ = c$$

حيث c مقدار ثابت . في هذه الحالة يكون القيد تام التقييد . نستنتج ممّا سبق أنّه يمكن كتابة القيود تامة التقييد على الشكل التفاضلي التالي :

$$df_\alpha = \sum_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i}\,d\,q_i\ + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\,dt = 0 \qquad (2.32)$$

نستطيع الآن أنْ ندخل هذه القيود الى معادلات لاجرانج باستخدام مضاعفات لاجرانج (Lagrange multipliers) $\lambda_\alpha(t)$. حيث إنّ معادلات لاجرانج في حالة وجود مثل هذه القيود تُعطى بالعلاقة التالية :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_\alpha \lambda_\alpha(t)\,\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} \qquad (2.33)$$

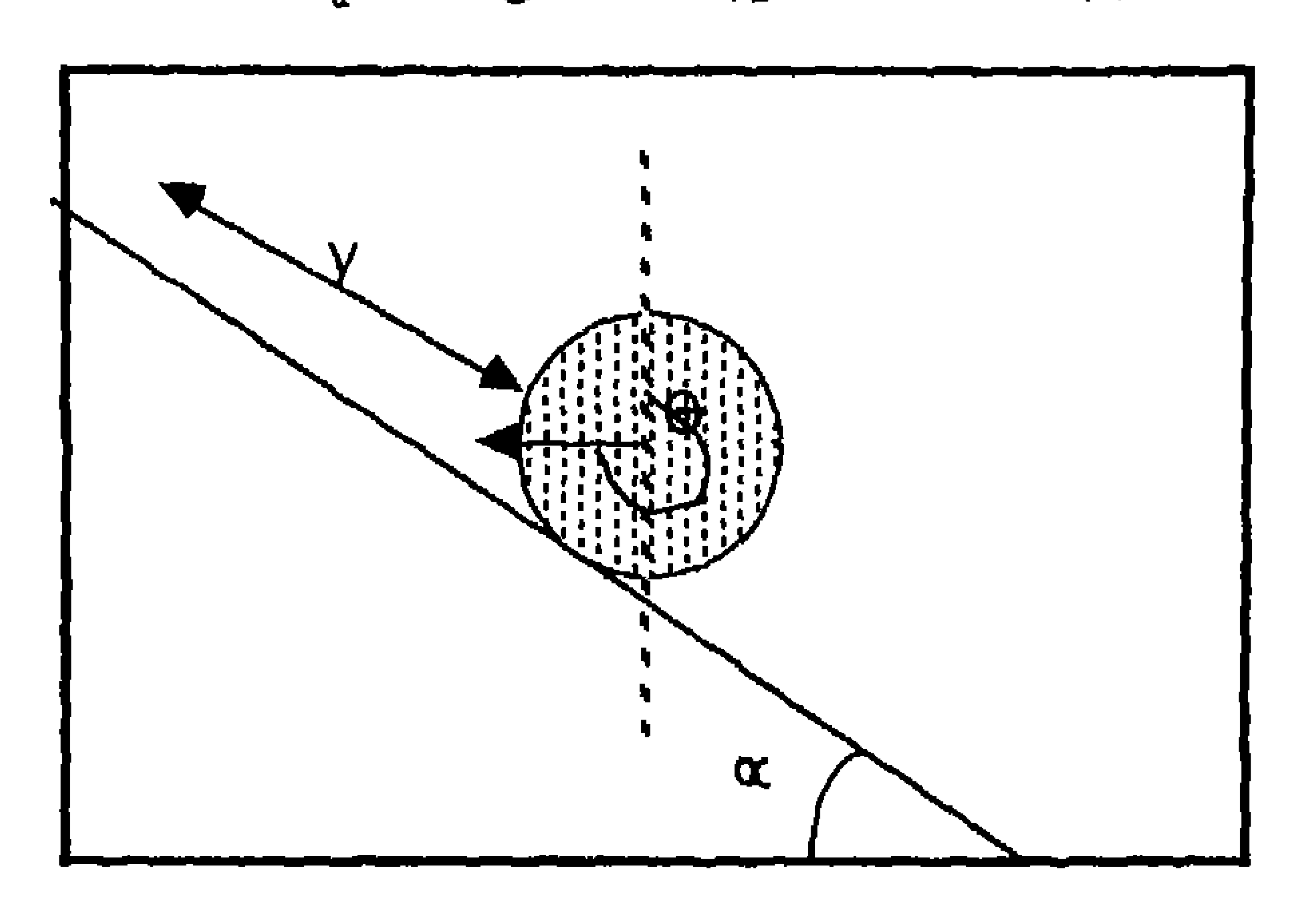
يجب أن نلاحظ أنّ عدد مضاعفات لاجرانج يساوي عدد القيود ، و أنّ مضاعفات لاجرانج هي عبارة عن قوى القيود . و حتى نوضح هذه الفكرة سندرس الأمثلة التالية .

مثال (2.10)

يتدحرج قرص كتلته M و نصف قطره R بدون إنزلاق على سطح مائل بزاوي α عن الأفق كما في الشكل (2.6) .

أولا – حدد معادلة القيد بدلالة الإحداثيات θ, y . ثانيا – جد :

أ) معادلات الحركة ، ب) قوة القيد ، ج) التسارع الزاوي ؟



الشكل (2.6) : قرص يتدحرج على سطح مائل

الحل :

معادلة القيد هي $y = R\theta$ ، أي أنّ إزاحة القرص تساوي نصف القطر مضروبا في الزاوية θالتي دارها ، و يمكن كتابة هذا القيد على الصورة التالية :

$$f(y,\theta) = y - R\theta = 0$$

طاقة الحركة تتكون من جزئين : طاقة حركة دورانية ناتجة عن دوران القرص وهي : $\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$ علما أنّ عزم قصور القرص $I = \frac{1}{2} M R^2$ ، وطاقة حركة انتقالية ناتجة عن انتقال القرص وهي : $\frac{1}{2} M \dot{y}^2$. أمّا طاقة الوضع فهي : $V = -Mg\, y \sin\alpha$ على افتراض أنّ طاقة الوضع تساوي صفرا عند القمة ، و على هذا الاساس فإنّ دالة لاجرانج تعطى بالعلاقة التالية :

$$L = T - V = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 + Mg\, y \sin\alpha$$

وبما أنّه لدينا قيد واحد ، فإنّ عدد مضاعفات لاجرانج واحد . و باستعمال معادلة لاجرانج (2.33) نحصل على معادلات الحركة التالية :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \qquad (2.34a)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} \qquad (2.34b)$$

باستعمال المعادلة (2.32) يمكن أن يكتب القيد على الشكل الآتي :

$$df = dy - R\, d\theta$$

المشتقات الجزئية لدالة لاجرانج بالنسبة لكل من θ ، $\dot{\theta}$ ، y و $\dot{y}$ هي :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta} \ , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = M \dot{y} \ , \ \frac{\partial L}{\partial y} = Mg \sin \alpha$$

أيضا :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \ , \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = -R$$

و بتعويض هذه المشتقات في المعادلة (2.34) ، تصبح معادلات الحركة كما يلي :

$$\frac{1}{2} M R^2 \ddot{\theta} = -R\lambda$$

$$M \ddot{y} - Mg \sin \alpha = \lambda$$

بالإضافة إلى القيد $y = R\theta$ ، فإنّه يوجد لدينا ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل λ ، y و θ

$$\lambda = \frac{-MR\ddot{\theta}}{2} = \frac{-M\ddot{y}}{2}$$

حيث $\ddot{y} = R\ddot{\theta}$ كما تبين من معادلة القيد . و بتعويض قيمة λ في معادلات الحركة السابقة نحصل على :

$$\frac{3}{2} M \ddot{y} = Mg \sin \alpha \Longrightarrow \ddot{y} = \frac{2g \sin \alpha}{3}$$

إذن قوة القيد

$$\lambda = \frac{-Mg \sin \alpha}{3}$$

وأخيراً التسارع الزاوي

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{y}}{R} = \frac{2\, g \sin \alpha}{3R}$$

مثال (2.11)

خرزة كتلتها M تنزلق إلى الأسفل بدون إحتكاك من قمة حلقة دائرية نصف قطرها R . كما في الشكل (2.7) . أ) أكتب دالة لاجرانج . ب) جد محصلة قوة رد الفعل λ التي تؤثر بها الحلقة على الخرزة باستخدام مضاعفات لاجرانج ؟

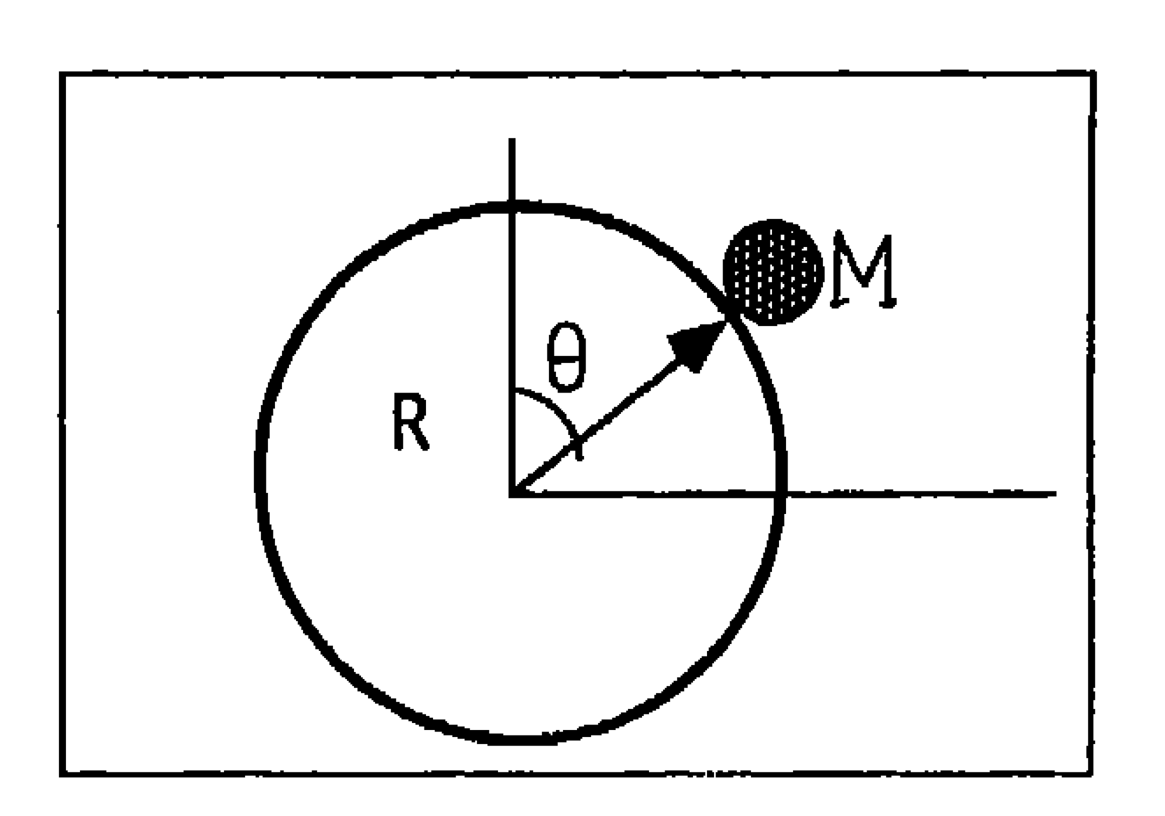
ج) حدد الزاوية التي تسقط عندها الخرزة عن الحلقة . د) جد القوة المركزية التي

تؤثر بها الحلقة على الخرزة ؟

الحل :

أ) طاقة الحركة و الوضع – للخرزة –على الترتيب هما :

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$



الشكل (2.7) : خرزة تنزلق من قمة حلقة

$$V = M g r \cos\theta$$

على افتراض أنّ طاقة الوضع عند مستوى مركز الحلقة صفر . دالة لاجرانج هي :

$$L = \frac{1}{2} M (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - M g r \cos\theta$$

بالاضافة إلى القيد $r = R$. نكتب معادلات لاجرانج كما يلي :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda \frac{\partial f}{\partial r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

التفاضلات الجزئية لدالة لاجرانج هي :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = M \dot{r} \ ، \ \frac{\partial L}{\partial r} = M r \dot{\theta}^2 - M g \cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = M r^2 \dot{\theta} \ ، \ \frac{\partial L}{\partial \theta} = M g r \sin\theta$$

و باستخدام الصيغة (2.32) نجد أنّ :

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \quad و \quad \frac{\partial f}{\partial r} = 1$$

لذلك تصبح معادلات الحركة كما يلي :

$$M \ddot{r} - M r \dot{\theta}^2 + M g \cos\theta = \lambda$$

$$M r^2 \ddot{\theta} + 2 M r \dot{r} \dot{\theta} - M g r \sin\theta = 0$$

لكن القيد $r = R$ يعطي

$$\dot{r} = \ddot{r} = 0$$

لذلك تصبح معادلات لاجرانج على النحو التالي :

$$MR^2 \ddot{\theta} - M g R \sin\theta = 0$$

$$- M R \dot{\theta}^2 + M g \cos\theta = \lambda$$

بضرب طرفي المعادلة الاولى ب $\frac{\dot{\theta}}{MR}$ نحصل على :

$$R \ddot{\theta} \dot{\theta} = g \sin\theta \dot{\theta}$$

و بما أنّ :

$$\ddot{\theta} \dot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{d\left(\dot{\theta}^2\right)}{d t} \quad \text{و} \quad \sin\theta \dot{\theta} = - \frac{d}{d t} (\cos\theta)$$

عوّض هذه في المعادلة السابقة ينتج :

$$\frac{1}{2} R \frac{d\left(\dot{\theta}^2\right)}{d t} = - g \frac{d}{d t} (\cos\theta)$$

و بمكاملة الطرفين نحصل على :

$$\frac{1}{2} R \dot{\theta}^2 = - g \cos\theta + c$$

حيث c ثابت . والآن عند الزمن $t = 0$ تكون $\dot{\theta} = 0$, $\theta = 0$ و تكون قيمة الثابت c تساوي g . إذن

$$\dot{\theta}^2 = \frac{-2 g}{R} (\cos\theta - 1)$$

ب) للحصول على رد الفعل نعوض قيمة $\dot{\theta}^2$ في معادلة الحركة في البعد r

$$- M R \dot{\theta}^2 + M g \cos\theta = \lambda$$

$$- M R \left(\frac{-2g}{R}\right) (\cos\theta - 1) + M g \cos\theta = \lambda$$

$$\lambda = M g (3 \cos\theta - 2)$$

ج) و عندما تسقط الخرزة عن الحلقة يكون رد الفعل يساوي صفرا وهذا يحصل عندما

$$M g (3 \cos\theta - 2) = 0 \Longrightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \Longrightarrow \theta = 48^0$$

د) القوة المركزية هي :

$$F_c = M R \dot{\theta}^2 = - 2 M g (\cos\theta - 1)$$

مثال (2.12)

سلك أملس مثني على شكل حلزوني ، تنزلق عليه خرزة كتلتها m ، إذا أثرت على الخرزة أثناء الحركة قوة جذب باتجاه المركز تتناسب طرديا مع المسافة بين الخرزة

و المركز $\vec{F} = -\alpha \vec{r}$ ، جد مركبات رد الفعل على الخرزة في الاتجاهات الثلاثة (ρ , θ , z) . علما بأنّ الإحداثيات الإسطوانية لمسار الخرزة تحقق العلاقتين $z = k\theta$ و $\rho = a$ ، حيث k و a ثابتان .

الحل :

طاقة الحركة في الاحداثيات الإسطوانية هي :

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

و نحسب طاقة الوضع من القوة كما يلي :

$$V = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \alpha r^2 = \frac{1}{2} \alpha (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} \alpha (\rho^2 + z^2)$$

إذن دالة لاجرانج هي :

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} \alpha (\rho^2 + z^2)$$

هذه الدالة تبين أنه يوجد لدينا ثلاث إحداثيات معمّمة ρ ، θ و z . لذلك يوجد لدينا ثلاث معادلات للحركة

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \rho} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \rho}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}$$

حيث إنّ دالتي القيد هما :

$$f_1 = \rho - a , f_2 = z - \theta k$$

يوجد قوتا قيد λ_2 و λ_1 لأن هناك قيدين . وبكتابة هذه القيود على الصيغة (2.32) ، نجد أنّ :

$$df_1 = d\rho \qquad , \qquad df_2 = dz - k\, d\theta$$

المشتقات الجزئية التي تظهر في معادلات الحركة تعطى بالعلاقات التالية :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \; , \; \frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho\dot{\theta}^2 - \alpha\rho \; , \; \frac{\partial f_1}{\partial \rho} = 1 \; , \; \frac{\partial f_2}{\partial \rho} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta} \; , \; \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \; \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = 0 \; , \; \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = -k$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \; , \; \frac{\partial L}{\partial z} = -\alpha z \; , \; \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0 \; , \; \frac{\partial f_2}{\partial z} = 1$$

نعوض قيم هذه المشتقات في معادلات لاجرانج السابقة ، فنحصل على معادلات الحركة التالية :

$$m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\theta}^2 + \alpha\rho = \lambda_1$$

$$m\rho^2\ddot{\theta} + 2m\rho\dot{\rho}\dot{\theta} = -k\lambda_2$$

$$m\ddot{z} + \alpha z = \lambda_2$$

نلاحظ وجود ثلاث معادلات حركة بالإضافة إلى معادلتي القيود ، فيصبح لدينا خمس معادلات بخمسة مجاهيل يمكن إيجادها λ_2 ، λ_1 ، z ، θ ، ρ.

الآن باستخدام القيود

$$\rho = a\,,\ \dot{\rho} = 0\,,\ \ddot{\rho} = 0$$

$$z = k\theta\,,\ \dot{z} = k\dot{\theta}\,,\ \ddot{z} = k\ddot{\theta}$$

و عند التعويض في معادلات الحركة فتصبح النتيجة النهائية كما يلي :

$$-ma\dot{\theta}^2 + \alpha a = \lambda_1$$

$$mk\ddot{\theta} + k\alpha\theta = \lambda_2$$

$$ma^2\ddot{\theta} = -k\lambda_2$$

وبتعويض قيمة λ_2 من المعادلة التي قبلها نجد :

$$ma^2\ddot{\theta} = -mk^2\ddot{\theta} - \alpha k^2\theta$$

أي أنّ :

$$m(a^2 + k^2)\ddot{\theta} + \alpha k^2\theta = 0$$

إذن معادلة الحركة يمكن أن تكتب على الصيغة التالية :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha k^2}{m(a^2 + k^2)}\theta = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلُها يعطى بالعلاقة :

$$\theta = A\cos(\omega t + \delta)$$

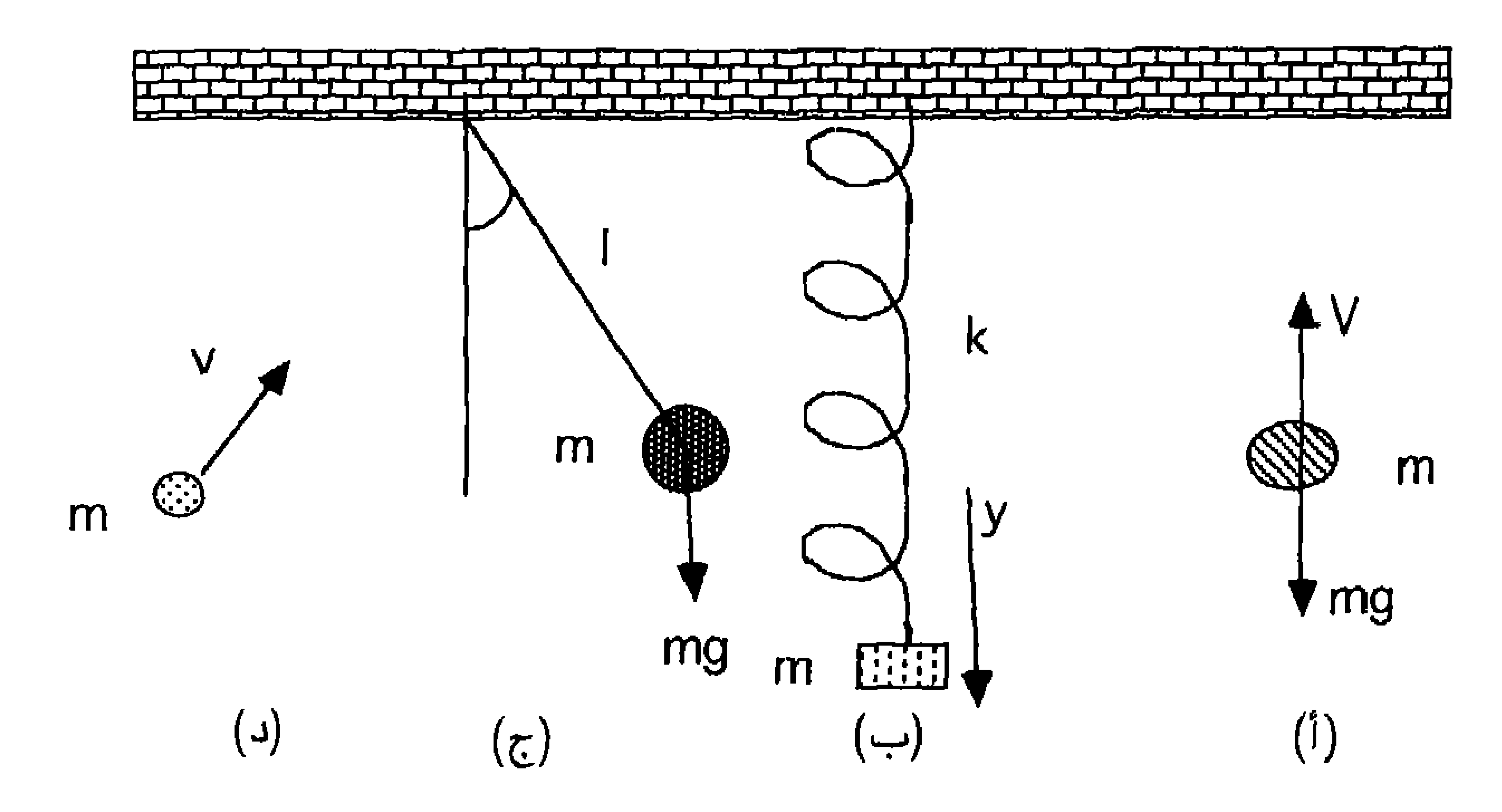
حيث :

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha k^2}{m(a^2 + k^2)}}$$

نستطيع الآن إيجاد قيمλ_1 وλ_2 و ذلك بتعويض $\theta = A\cos(\omega t + \delta)$ في معادلات الحركة السابقة ، فنحصل على رد الفعل باتجاه المحور z و هو : $F_z = \lambda_2$ ، و المركبة الزاوية $F_\theta = -k\lambda_2$ ، و المركبة القطرية $F_r = \lambda_1$.

أسئلة عامّة وحلول جزئية

1) مستعينا بالشكل (2.8) ، جد معادلات لاجرانج للحركة في الحالات التالية :
أ) جسم كتلته m قذف للأعلى تحت تأثير الجاذبيةالأرضية ؟
ب) جسم كتلته m معلّق بزنبرك ثابت مرونته k يهتز في المستوى العمودي ؟
ج) بندول بسيط يتأرجح في المستوى العمودي ؟
د) جسم كتلته m يتحرك تحت تأثير الجاذبية الأرضية في الاتجاهات المتعامدة الثلاثة ؟



الشكل (2.8) : أ - جسم مقذوف ، ب - جسم معلق بزنبرك ، ج - بندول بسيط .

الحل الجزئي :

أ)
$$T=\frac{1}{2}m\dot{y}^2 \; , \; V=mgy \; , \; L=\frac{1}{2}m\dot{y}^2-mgy$$

$$m\ddot{y}-mg=0$$

ب)
$$L=\frac{1}{2}m\dot{y}^2-\frac{1}{2}ky^2$$

$$m\ddot{y}+ky=0$$

ج)
$$L=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-mgl\left(1-\cos\theta\right)$$

$$ml^2\ddot{\theta}+mgl\sin\theta=0$$

د)
$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)-mgz$$

$$m\ddot{x}=0 \; , \; m\ddot{y}=0 \; , \; m\ddot{z}+mg=0$$

2) جد معادلات الحركة و القوى المعمّمة لجسم كتلته m و يتحرك في المستوى القطبي ، ويخضع لقوة الجذب العكسي $F = -\frac{k}{r^2}$.

الحل الجزئي :

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{k}{r}$$

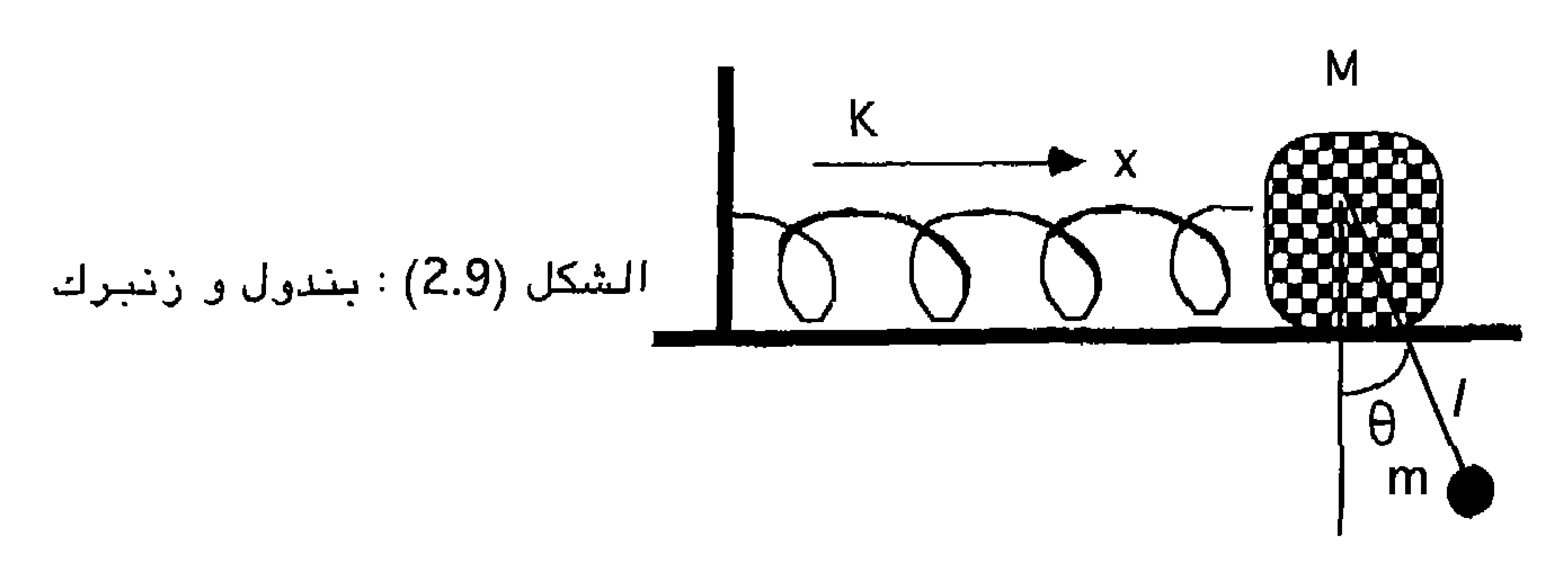
$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{k}{r^2} = 0$$

$$m r^2 \dot{\theta} = \text{ثابت}$$

$$Q_r = F_r = -\frac{k}{r^2}$$

$$Q_\theta = F_\theta = 0$$

3) جسم كتلته M مربوط بزنبرك ثابت مرونته k ، وطرفه الآخر مثبت . يتحرك هذا الجسم على مستوى أفقي أملس . علّق به بندول بسيط كتلته m و طوله l كما في الشكل (2.9) . جد معادلات لاجرانج لهذا النظام في حالة الاهتزازات البسيطة ؟



الشكل (2.9) : بندول و زنبرك

الحل الجزئي :

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + ml\cos\theta\ \dot{\theta}\ \dot{x} - \frac{1}{2} k x^2 + mlg\cos\theta$$

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + kx = 0 \quad , \quad \sin\theta \cong \theta$$

$$m l^2 \ddot{\theta} + ml\ddot{x} + mlg\theta = 0 \quad , \quad \cos\theta \cong 1$$

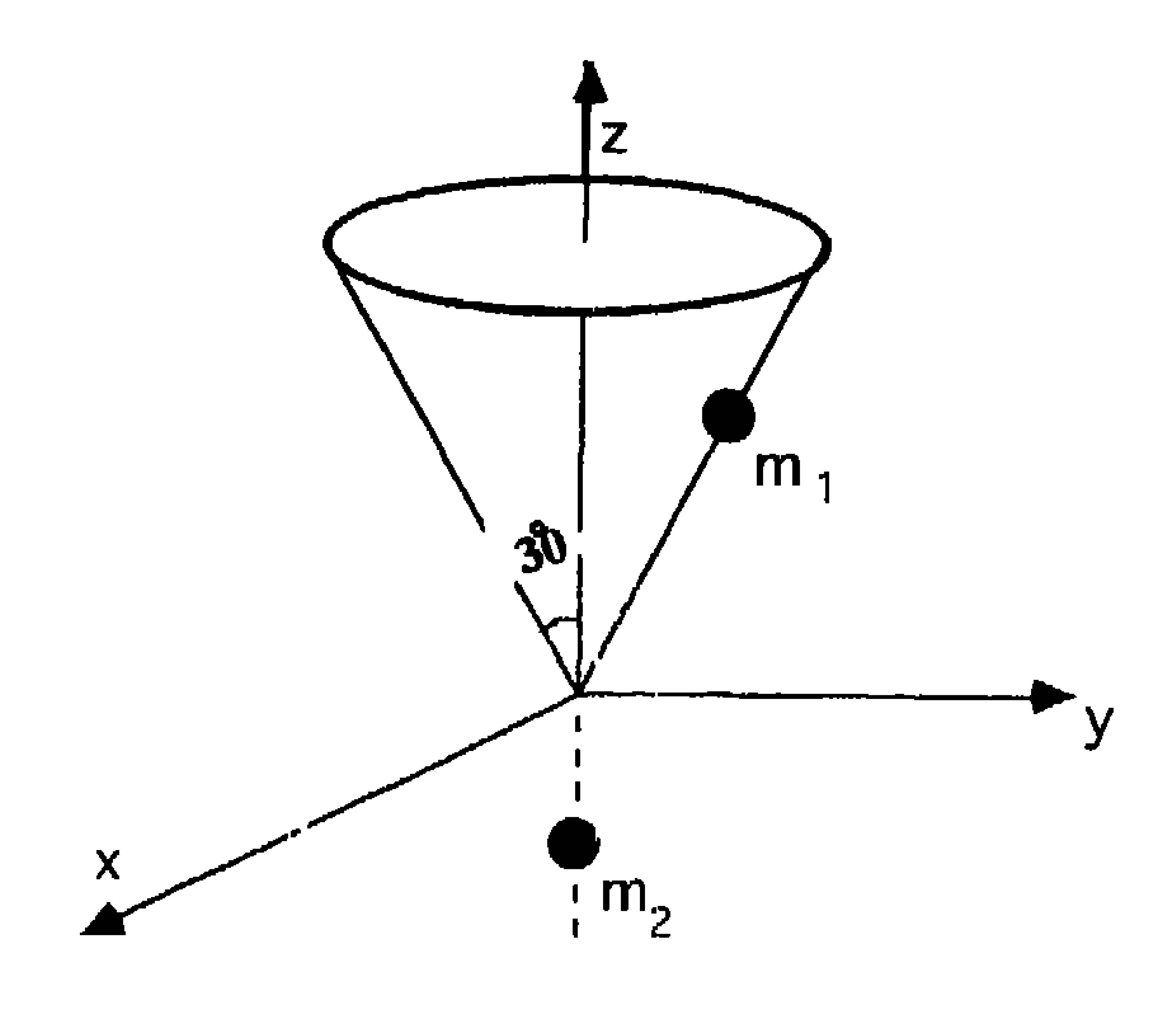
4) كتلتان m_1 و m_2 مربوطتان بواسطة خيط مهمل الكتلة طوله l . تتحرك الكتلة m_1 على السطح الداخلي للمخروط بدون احتكاك كما في الشكل (2.10) ، بينما تتحرك الكتلة m_2 للأعلى و الأسفل فقط . جد معادلات لاجرانج لهذا النظام ، مع العلم أنّ مربع السرعة في الإحداثيات الكروية يعطى بالعلاقة : $v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \rho^2\sin^2\theta\,\dot{\Phi}^2$.

الحل الجزئي :

$$L=\frac{1}{2}m_1\left(\dot{\rho}^2+\frac{\rho^2\dot{\Phi}^2}{4}\right)+\frac{1}{2}m_2\,\dot{\rho}^2-\frac{\sqrt{3}}{2}g\,m_1\rho+m_2 g\,(l-\rho)$$

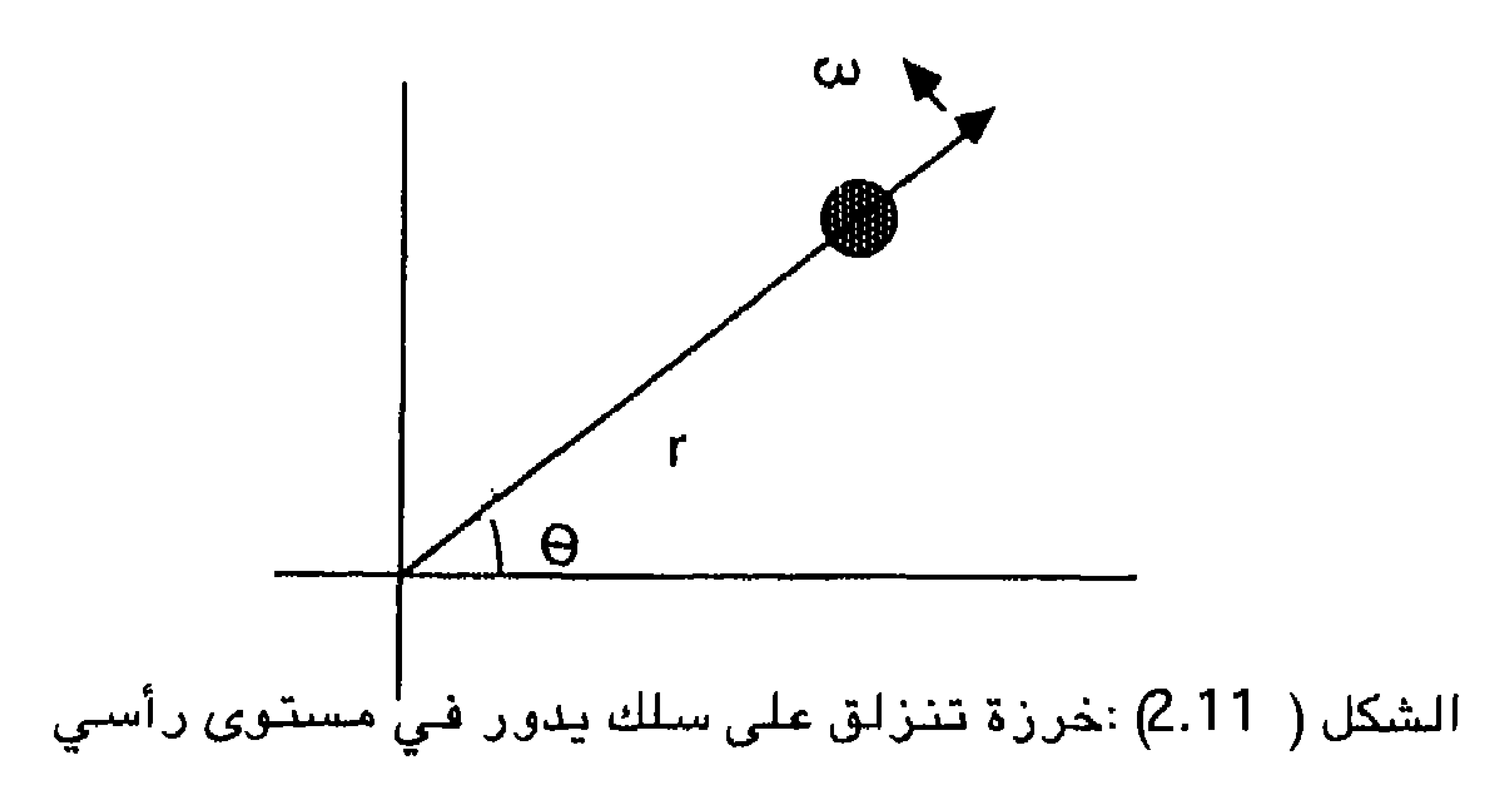
$$\frac{d}{dt}\left\{(m_1+m_2)\dot{\rho}\right\}-\frac{m_1\rho\,\dot{\Phi}^2}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}g\,m_1+m_2 g=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\rho^2\dot{\Phi}}{4}\right)=0$$



الشكل (2.10) : كتلة تتحرك على سطح مخروط

5) تنزلق خرزة كتلتها m على سلك مستقيم مهمل الكتلة بدون احتكاك كما في الشكل (2.11) . إذا كان السلك يدوربسرعة زاوية ثابتة مقدارها ω في المستوى العمودي . أ) جد موضع الخرزة القطري كدالة بالنسبة للزمن (افترض أنّ $\dot{r}=v$ و $r=R$ عندما $t=0$ ، و تسارع الجاذبية الأرضية g ؟ ، ب) تحرى قوة القيد



الشكل (2.11 :خرزة تنزلق على سلك يدور في مستوى رأسي

الحل الجزئي :

$$L = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2\right) - mgr \sin \omega t$$

$$\ddot{r} - \omega^2 r = -g \sin \omega t$$

$$r = R \cosh \omega t + \left(\frac{v}{\omega} - \frac{g}{2\omega^2}\right) \sinh \omega t + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t$$

ب) القيد $\omega t = \theta$ ،

$$\lambda = 2\, m\, \omega r\, \dot{r} + mgr \cos \omega t$$

6) حدِّد معادلات الحركة للنظام الذي يتكون من بكرتين ملساوتين و ثلاثة أجسام تتحرك كما في الشكل (2.12) . أهمل كتلة الخيوط .

الحل الجزئي :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{y} - \dot{x}\right)^2 + \frac{1}{2} m_3 \left(-\dot{y} - \dot{x}\right)^2$$

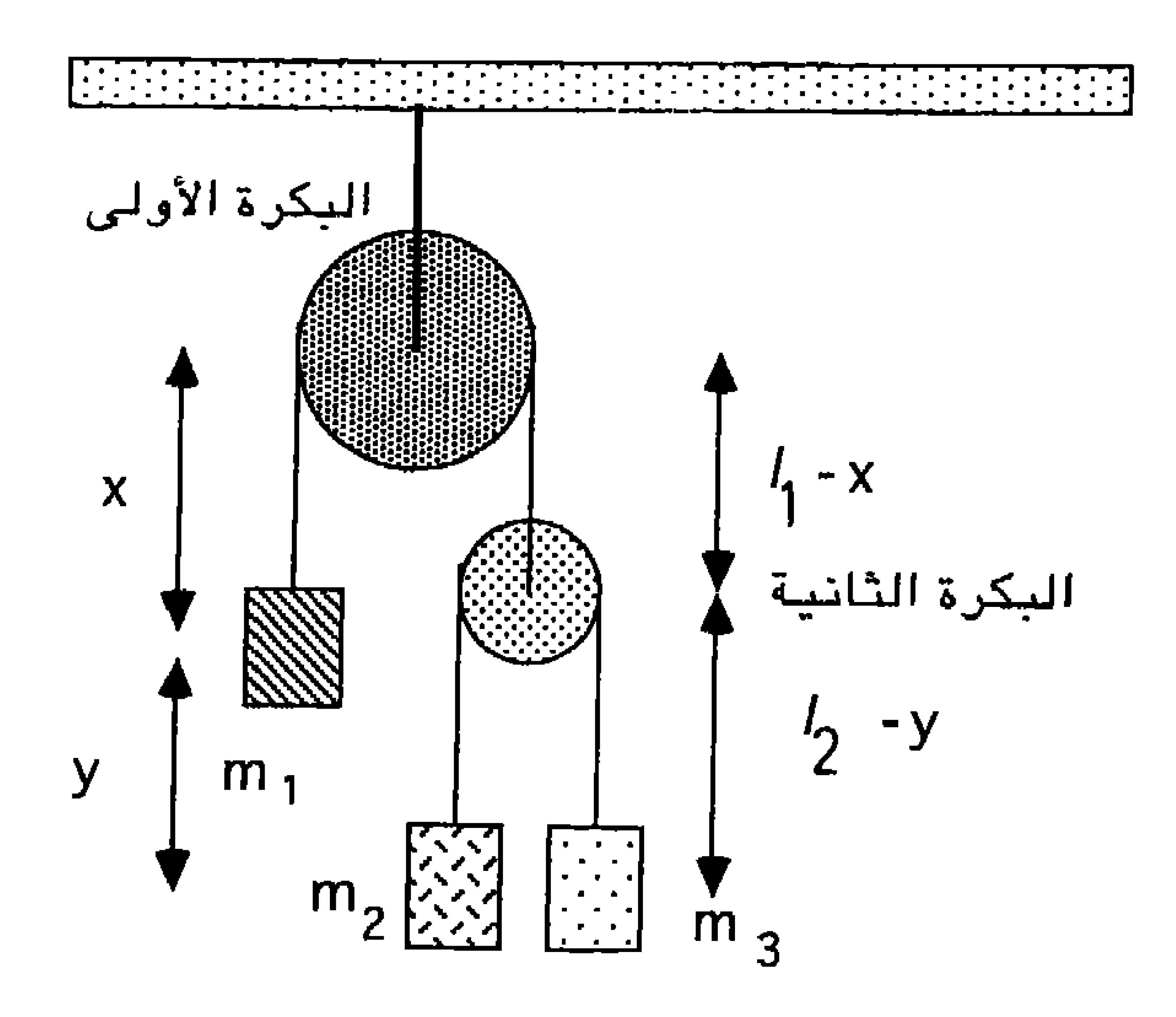
$$V = -m_1 g x - m_2 g \left(l_1 - x + y\right) - m_3 g \left(l_1 - x + l_2 - y\right)$$

حيث طاقة الوضع V تساوى صفراً عندما $x = 0$

معادلات الحركة هي :

$$m_1 \ddot{x} + m_2 \left(\ddot{x} - \ddot{y}\right) + m_3 \left(\ddot{x} + \ddot{y}\right) = \left(m_1 - m_2 - m_3\right) g$$

$$-m_2 \left(\ddot{x} - \ddot{y}\right) + m_3 \left(\ddot{x} + \ddot{y}\right) = \left(m_2 - m_3\right) g$$



الشكل (2.12) : نظام يتألف من بكرتين ملساوتين و ثلاثة أجسام معلقة .

7) جسيم كتلته m مقيد الحركة على السطح الداخلي الأملس لمخروط زاويته α ، كما في الشكل (2.13) . حدِّد الاحداثيات المعمّمة و القيود ، ثم جد معادلات لاجرانج للحركة إذا أثرت الجاذبية على الجسيم ؟

الحل الجزئي :

الاحداثيات المعمّمة هي ρ ، θ و z ، معادلة القيد هي : $z = \rho \cot\alpha$ و نستطيع حذف ρأوz .

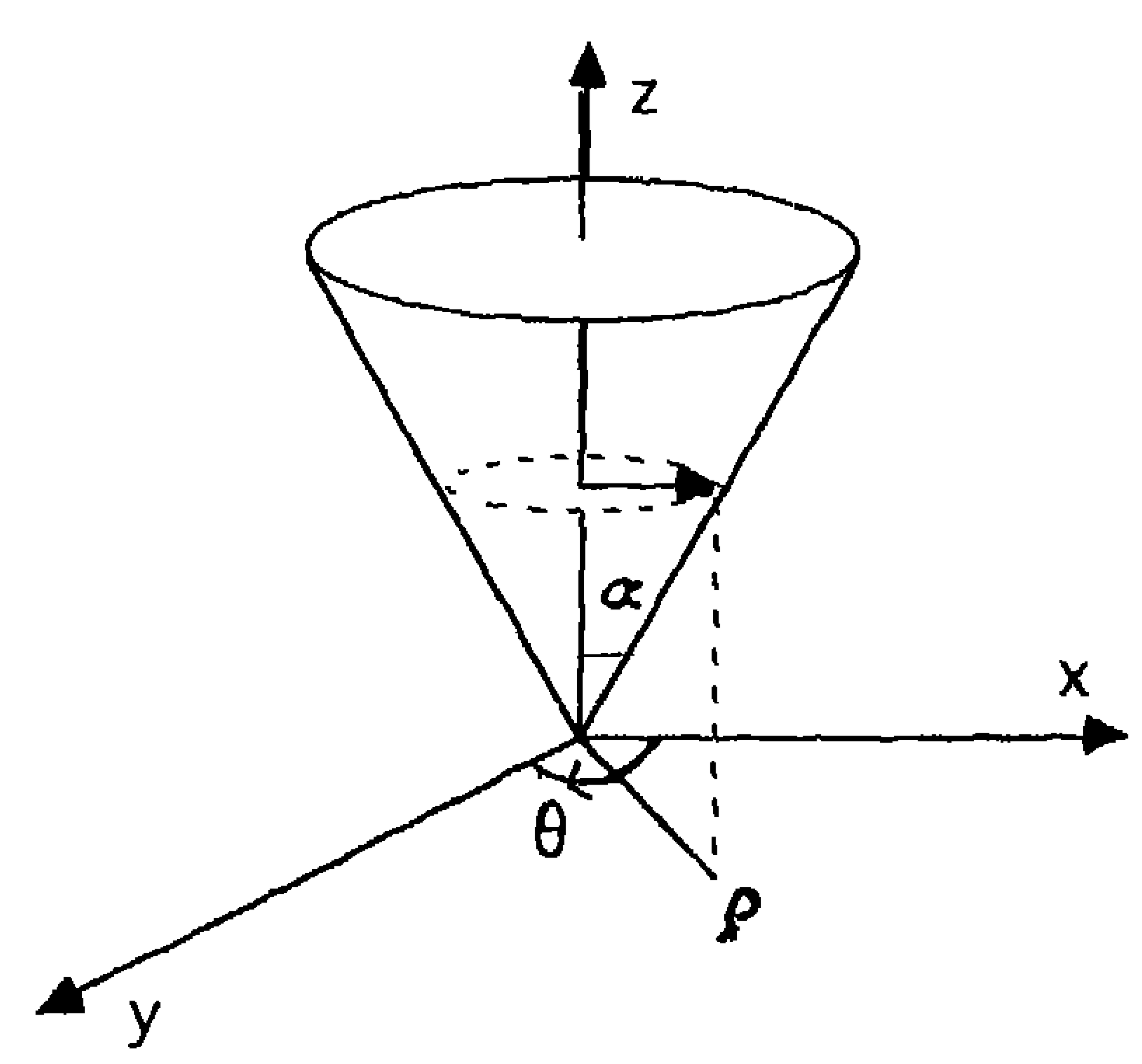
$$L = \frac{1}{2} m\left(\dot{\rho}^2 \csc^2\alpha + \rho^2 \dot{\theta}^2\right) - mg\rho \cot\alpha$$

معادلاتا الحركة في البعدين θ و ρ هما :

$$m \rho^2 \dot{\theta} = c$$

حيث c ثابت و

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 \sin^2\alpha + g\sin\alpha \cos\alpha = 0$$



الشكل (2.13) :جسيم مقيد الحركة على السطح الداخلي لمخروط

8) عُلِّق بندول بسيط طوله L بسلك دائري رفيع عديم الكتلة ، نصف قطره R ، و يدور في مستوى رأسي بسرعة زاوية مقدارها ω . جد المركبات المتعامدة لسرعة و تسارع الجسم m ، و التسارع الزاوي ، كما هو موضح في الشكل (2.14) ؟

الحل الجزئي :

إحداثيات الكتلة m بالنسبة إلى مركز السلك الدآئري هي :

$$x = R\cos\omega t + L\sin\theta$$

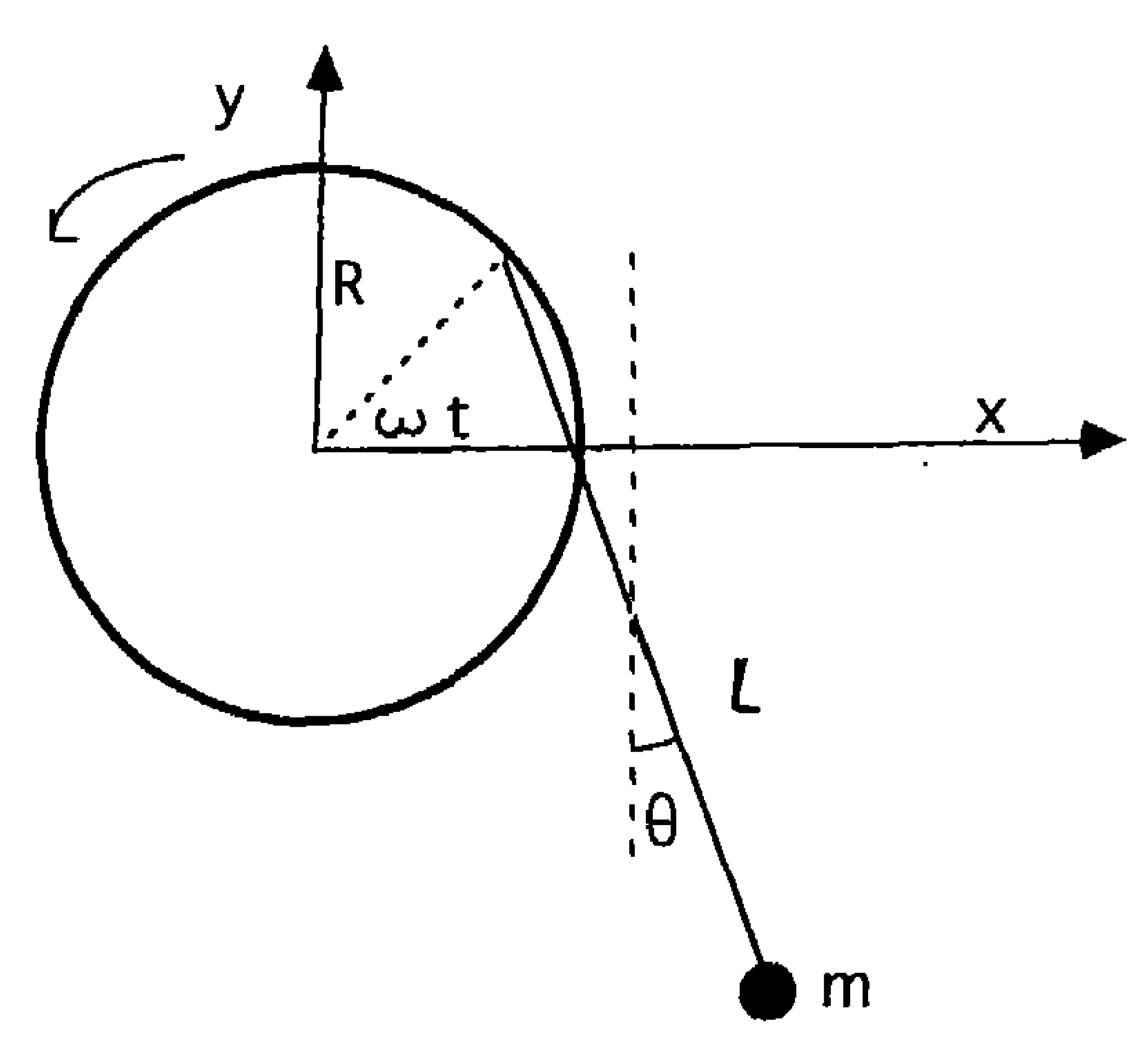
$$y = R\sin\omega t - L\cos\theta$$

المركبات المتعامدة للسرعة

$$\dot{x} = -R\,\omega \sin \omega t + L\,\dot{\theta}\,\cos\theta$$
$$\dot{y} = R\,\omega \cos \omega t + L\,\dot{\theta}\,\sin\theta$$

المركبات المتعامدة للتسارع

$$\ddot{x} = -R\,\omega^2 \cos \omega t + L\left(\ddot{\theta}\,\cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta\right)$$



الشكل (2.14) : بندول بسيط معلق بسلك دائري يدور في مستوى رأسي

$$\ddot{y} = -R\,\omega^2 \sin \omega t + L\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2 \cos\theta\right)$$

دالة لاجرانج للنظام

$$L = \frac{1}{2} m \left\{R^2\omega^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2LR\,\dot{\theta}\,\omega \sin(\theta - \omega t)\right\} - mg\left(R \sin \omega t - L\cos\theta\right)$$

معادلة لاجرانج

$$\ddot{\theta} = \frac{\omega^2 R}{L}\cos(\theta - \omega t) - \frac{g}{L}\sin\theta$$

9) تتحرك خرزة على سلك عديم الاحتكاك مثني على شكل قطع زائد $z = c\rho^2$ أنظر الشكل (2.15) ، تدور الخرزة في دائرة نصف قطرها R ، عندما يدور السلك حول محور تماثله العمودي z بسرعة زاوية ثابتة مقدارها ω . جد قيمة c ؟

الحل الجزئي :

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\right)$$

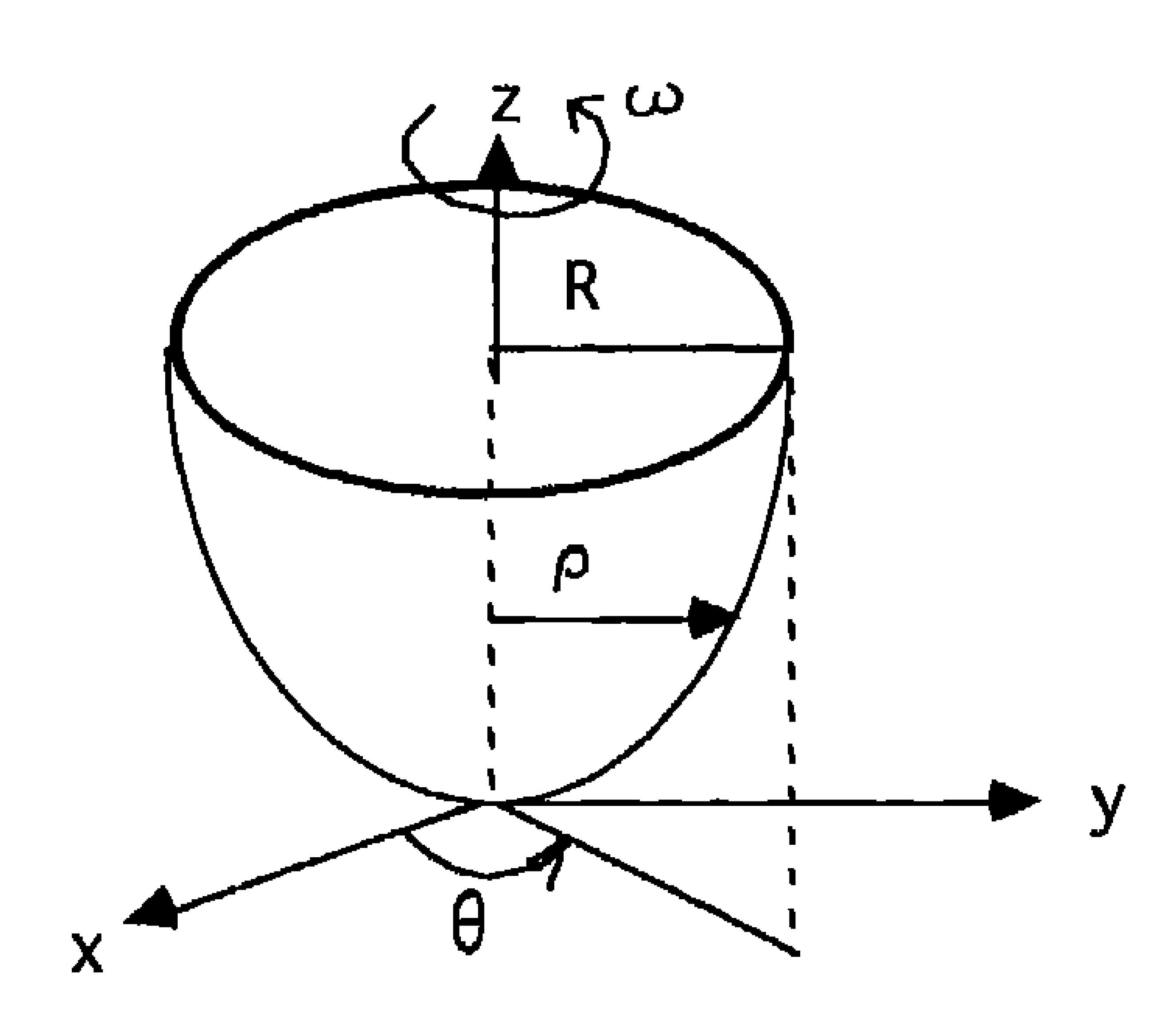
$V = mg\,z$, $\theta = \omega t$ $\qquad$ $V = 0$ عندما $z = 0$

معادلة الحركة بالنسبة لِ ρ

$$\ddot{\rho}\left(1+4c^2\rho^2\right)+\dot{\rho}^2\left(4c^2\rho\right)+\rho\left(2gc-\omega^2\right)=0$$

عندما تدور في دائرة R =ρ

$$R\left(2gc-\omega^2\right)=0$$



الشكل(2.15) : خرزة تتحرك على سلك (شكله قطع زائد)

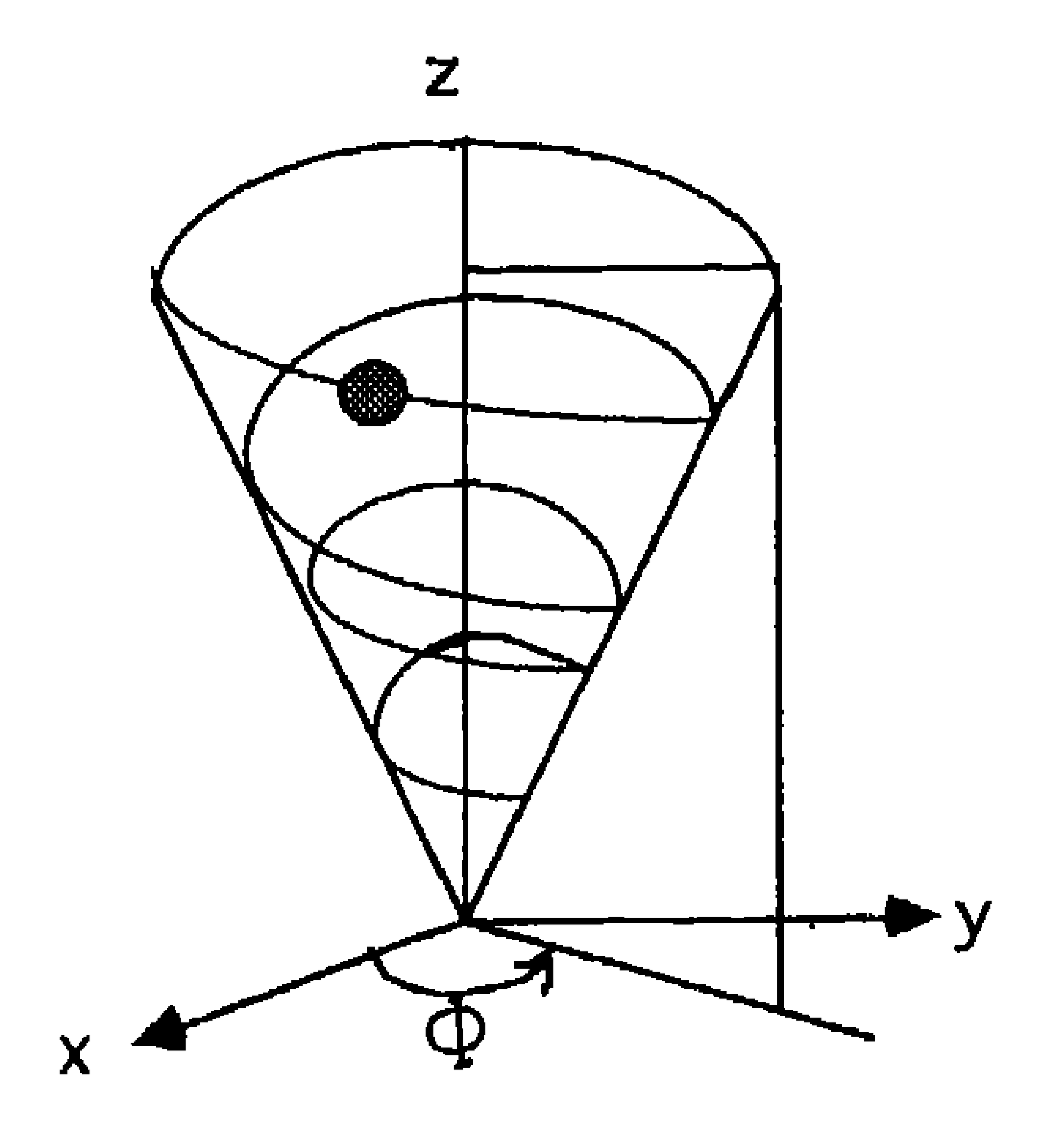
$$c=\frac{\omega^2}{2g}$$

10) خرزة مقيدة الحركة على سلك أملس ملفوف لولبيا على شكل مخروط كما في الشكل (2.16) .على افتراض أنّ $\rho = az$ و $\Phi = -bz$ حيث a و b ثابتان .

أ) جد دالة لاجرانج ؟ ب) اثبت أنّ معادلة الحركة تأخذ الشكل التالي :

$$\ddot{z}\left(a^2+1+a^2b^2z^2\right)+a^2b^2z\dot{z}^2=-g$$

ج) جد معادلات الحركة مستخدما مضاعفات لاجرانج ؟



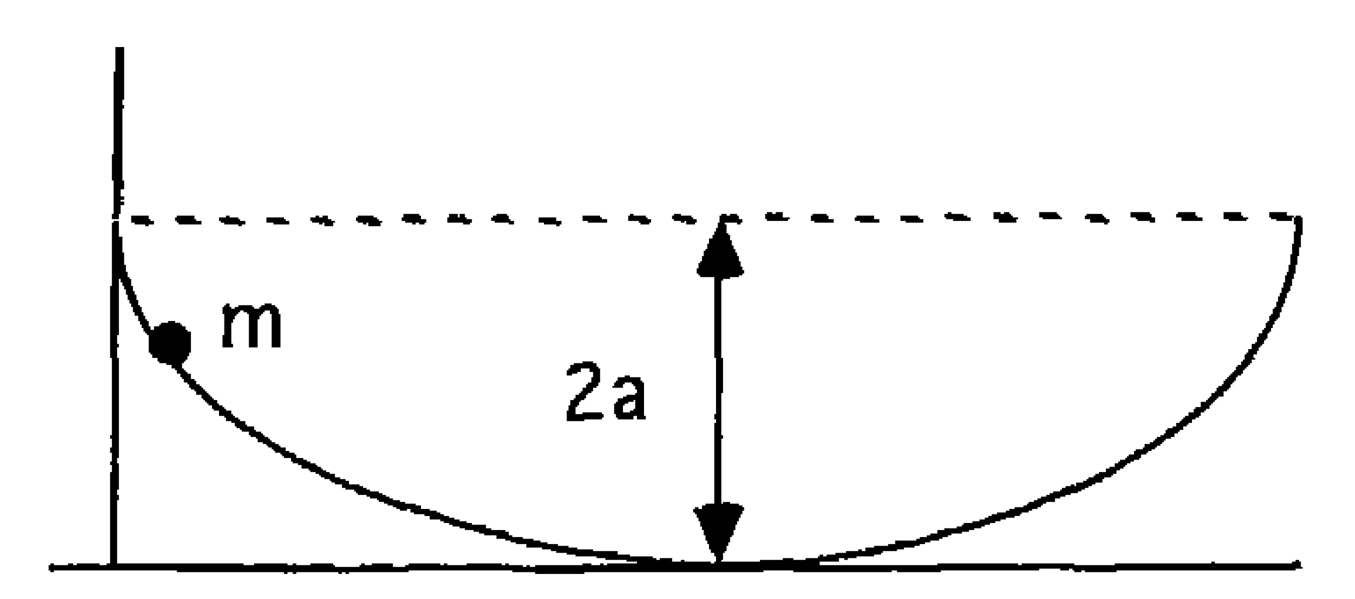
الشكل (2.16) : خرزة مقيدة الحركة

الحل الجزئي :

أ)
$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\Phi}^2+\dot{z}^2\right)$$
$$V=mgz$$
$$\dot{\rho}=a\dot{z} \quad , \quad \dot{\Phi}=-b\dot{z}$$
$$L=\frac{1}{2}m\left(a^2+a^2b^2z^2+1\right)\dot{z}^2-gmz$$

ج)
$$m\ddot{\rho}-m\rho\dot{\Phi}^2=\lambda_2$$
$$\frac{d}{dt}\left(m\rho^2\dot{\Phi}\right)=\lambda_1$$
$$m\ddot{z}+mg=b\lambda_1-a\lambda_2$$

11) تنزلق خرزة كتلتها m بدون احتكاك على سلك أملس شكله دويري كما في الشكل (2.17) المجاور حسب المعادلتين $y=a\left(1+\cos\theta\right)$ ، $x=a\left(\theta-\sin\theta\right)$ حيث $0\le\theta\le2\pi$. ا) ما هو عدد الإحداثيات المعمّمة ؟ ب) جد دالة لاجرانج و معادلة الحركة للنظام ؟



الشكل (2.17) : خرزة تنزلق على سلك أملس دويري الشكل

الحل الجزئي :

ا) يوجد إحداثي معمّم واحد θ .

ب) دالة لاجرانج هي :
$$L=ma^2\left(1-\cos\theta\right)\dot{\theta}^2-mga\left(1+\cos\theta\right)$$
$$\frac{d}{dt}\left\{\left(1-\cos\theta\right)\dot{\theta}\right\}-\frac{1}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}^2-\frac{g}{2a}\sin\theta=0$$

12) جسيم كتلته m يتحرك تحت تأثير طاقة وضع مقدارها $V(x)=-kx$ حيث k ثابت . إذا انتقل الجسيم من الموضع $x=0$ إلى الموضع $x=a$ في زمن مقداره τ . جد دالة الموضع بدلالة الزمن ؟

الحل الجزئي :
$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+kx$$
$$x(t)=\frac{-k}{2m}t^2+\left(\frac{a}{\tau}-\frac{k}{2m}\tau\right)t$$

الفصل الثالث
معادلات هاميلتون
(Hamiltonian Equations)

3.0* المقدمة

معادلات هاميلتون ، هي امتداد لمعادلات لاجرانج ، و توفر طريقة جديدة لصياغة معادلات الحركة ، حيث إنّ معادلات هاميلتون هي معادلات تفاضلية عادية من الدرجة الأولى ، بينما معادلات لاجرانج ، هي عبارة عن معادلات تفاضلية عادية من الدرجة الثانية . إنّ التعامل مع معادلات هاميلتون قد يكون أسهل ؛ لأنّها من الدرجة الأولى ، و تكمن أهمية هذه المعادلات بشكل خاص في حقل ميكانيكا الكم .

3.1* الزخم المعمّم والإحداثيات الدورية
(Generalized Momenta and Cyclic Coordinates)

لقد عرفنا في الفصل السابق أنّ دالّة لاجرانج هي عبارة عن دالّة تُعطى بدلالة الإحداثيات المعمّمة q_i والسّرع المعمّمة $\dot{q}_i$. وفي هذا الفصل سوف نتعرف على دالّة مرادفة ، وهي دالّة هاميلتون التي تُعطى بدلالة الإحداثيات المعمّمة q_i و الزخم المعمّم p_i الذي يُعرّف بالشكل التالي :

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (3.1)$$

نحن نعرف أنّ معادلات لاجرانج تُعطى بالعلاقة التالية :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (3.2)$$

و باستخدام العلاقتين (3.1) و (3.2) نحصل على :

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (3.3)$$

نستطيع الان أن نشاهد العلاقة بين ثوابت الحركة (Constants of Motion) و الزخم المعمّم ، حيث أنّ أي كمية معطاة بدلالة الإحداثيات و السّرع ، و تبقى ثابتة مع تغير الزمن تُسمى ثابت الحركة . وإذا افترضنا أنّ دالّة لاجرانج L في نظام معين لا تحتوي على الإحداثي q_λ . أي أنّ :

$$\frac{\partial L}{\partial q_\lambda} = 0 \qquad (3.4)$$

و باستخدام المعادلة (3.3) نحصل على :

$$\dot{p}_\lambda = 0$$

أي أنّ :

$p_\lambda =$ ثابت

إذا كانت دالّة لاجرانج التي لا تحتوي على الإحداثي المعمّم q_λ بصراحة (Explicitly) فإنّ الزخم المعمّم المصاحب لهذا الإحداثي المعمّم يسمّى ثابت الحركة ، بينما الإحداثي المعمّم q_λ يسمّى إحداثيا دوريا ، و بعبارة أخرى الزخم المعمّم المصاحب للإحداثي الدوري (cyclic coordenates) يكون ثابت حركة .

مثال (3.1)

جد ثوابت الحركة و الإحداثيات الدورية لجسيم يتحرك في مجال القوة المركزية ، حيث تعطى دالة لاجرانج بالإحداثيات القطبية كما يلي :

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - V(r)$$

الحل :

بما أنّ L لا تحتوي على الإحداثي θ ، فإنّ θ إحداثي دوري و الزخم المعمّم المصاحب لِ θ هو :

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} = \text{ثابت}$$

حيث p_θ يمثل الزخم الزاوي و هو ثابت الحركة . وهذا لايعني أنّ $\dot{\theta}$ ثابت حركة و لكنها تتغير و تتغير r بحيث يكون p_θ ثابتا .

3.2* قوانين الحفظ (Conservation Laws)

أي نظام لا يتفاعل مع المؤثرات الخارجيه للنظام يسمّى نظاما مغلقا (closed system) . في مثل هذه الحالة يوجد سبع ثوابت حركة لهذا النظام المغلق :

أ- الزخم الخطي الذي يتمثل بثلاثة مركبات ،

ب - الزخم الزاوي أيضا و له ثلاثة مركبات ،

ج - الطاقة الكليه .

3.2.1*حفظ الزخم المعمّم
Conservation of Generalized Momenta

لقد عرّفنا الزخم المعمّم بالمعادلة (3.1) و اتضح أن أي إحداثي معين مثل q_λ لا يظهر في دالة لاجرانج L يعني أنّ الزخم المعمّم p_λ المصاحب لذلك الإحداثي يكون محفوظا (أي ثابتا لا يتغير مع الزمن) ، و يمكن إعطاء التفسير الفيزيائي للزخم المعمّم على النحو التالي :

إذا كان الإحداثي الذي لم يظهر في دالة لاجرانج يمثل مسافة ، فإنّ الزخم المحفوظ

المصاحب لهذا الإحداثي يكون زخما خطيا ، و إذا كان يمثل زاوية ، فإنّ الزخم المحفوظ يكون زاويا ، و إذا كان الإحداثي لا يمثل مسافة أو زاوية - كما هو الحال في بعض النظم المعقدة - فإنّ الزخم العام يكون محفوظا أيضا ، ولكن ليس من السهل تفسير معناه فيزيائيا و يسمى ثابت حركه فقط .

3.2.2*حفظ الطاقة و دالة هاميلتون
(Conservation of Energy and Hamiltonian Function)

لا تعتمد دالة لاجرانج في النظام المغلق على الزمن بشكل صريح (Explicit) ونحن نعرف أنّ التفاضل الكلي لدالة لاجرانج يعطى بالعلاقة التالية :

$$dL = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{3.5}$$

و لكن النظام المغلق يعني أنّ :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{3.6}$$

لذلك فإنّ المشتقة الزمنية الكلية للدالة L تعطى كما يلي :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dt}$$

أي أنّ :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \tag{3.7}$$

و نحن نعرف من معادلة لاجرانج أنّ :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} \tag{3.8}$$

و بتعويض هذه المعادلة في المعادلة (3.7) نحصل على :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k$$

$$= \sum_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k\right) \tag{3.9}$$

أي أنّ :

$$\sum_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k\right) - \frac{dL}{dt} = 0 \tag{3.10}$$

و بصيغة أخرى :

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L\right) = 0 \qquad (3.11)$$

وهذا يعني أنّ ما بداخل القـ ـ هو كمية ثابتة تسمّى دالة هاميلتون و يرمز لها بالرمز H . و باستخدام تعريف الزخم المعمّم نستطيع كتابة دالة هاميلتون على الشكل :

$$H = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \sum_k \dot{q}_k p_k - L = \text{ثابت}$$

نستطيع القول أنّ دالة هاميلتون H هي ثابت حركة إذا كانت دالة لاجرانج L لا تعتمد على الزمن بصراحة ، أي أنّ :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

في النظام المحافظ أو في الحالة التي لا تعتمد فيها طاقة الوضع على السرعة ، يمكن كتابة الزخم المعمّم كما يلي :

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

لذلك تكتب دالة هاميلتون على الشكل :

$$H = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - L \qquad (3.12)$$

لكن :

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k m \dot{q}^2_k = 2T$$

و بالتعويض في المعادلة (3.12) نحصل على :

$$H = 2T - T + V = T + V = E$$

أي أنّ دالة هاميلتون هي مقدار ثابت يمثل الطاقة الكلية للنظام المحافظ .

و ممّا تقدم نستنتج أنّه إذا كانت دالة لاجرانج لا تعتمد على الزمن ، فإنّ دالة هاميلتون تساوي مقدارا ثابتا ، وإذا كانت طاقة الوضع للنظام لا تعتمد على السرعة فإنّ دالة هاميلتون تساوي الطاقة الكلية للنظام .

3.3* معادلات هاميلتون للحركة

نحن نعرف أنّ دالة لاجرانج L تعطى بدلالة الإحداثيات و السّرع المعمّمة وقد تحتوي على الزمن بشكل صريح ، أي أنّ :

$$L = L(q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots\ldots, \dot{q}_n, t) \qquad (3.13)$$

إذن تفاضل L الكلي يعطى بالعلاقة التالية :

$$dL = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_k} d q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{3.14}$$

و باستخدام تعريف الزخم المعمّم و معادلة لاجرانج

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad \text{و} \quad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

يمكن كتابة تفاضل L على الشكل التالي :

$$dL = \sum_{k=1}^{n} (\dot{p}_k \, d q_k + p_k \, d\dot{q}_k) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{3.15}$$

و بإضافة الحد $\sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \, d p_k$ إلى طرفي المعادلة السابقة نحصل على :

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \, dp_k + dL = \sum_{k=1}^{n} (\dot{p}_k \, d q_k + \dot{q}_k \, dp_k + p_k \, d\dot{q}_k) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

أي أنّ :

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \, dp_k + dL = \sum_{k=1}^{n} \{ \dot{p}_k \, d q_k + d(\dot{q}_k \, p_k)\} + \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{3.16}$$

و بإعادة ترتيب هذه المعادلة نحصل على :

$$d\left(\sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \, p_k - L\right) = \sum_{k=1}^{n} (\dot{q}_k \, dp_k - \dot{p}_k \, d q_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{3.17}$$

يمكن كتابة دالة هاميلتون كما يلي :

$$H \equiv \sum_{k=1}^{n} p_k \, \dot{q}_k - L \tag{3.18}$$

لذلك تأخذ المعادلة (3.17) الشكل التالي :

$$d H = \sum_{k=1}^{n} (\dot{q}_k \, dp_k - \dot{p}_k \, d q_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{3.19}$$

و بما أنّ التفاضل الكلي لدالة هاميلتون يحتوي على التفاضل الكلي للزخم المعمّم p_k و الإحداثيات المعمّمة q_k و الزمن t ، ولا يحتوي على التفاضل الكلي للسرعة ، فهذا يعني أنّ دالة هاميلتون يمكن أن تكتب بدلالة الإحداثيات q_k والزخم p_k و لا تعتمد هذه الدّالة على السرعة ، وبعبارة أخرى ، يمكن التعبير عن السرعة $\dot{q}_k$ بدلالة الزخم p_k وذلك باستخدام تعريف الزخم المعمّم

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

إذن دالة هاميلتون تكتب كما يلي :

$$H = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$$

لذلك فإنّ التفاضل الكلي للدالة H يعطى بالعلاقة التالية :

$$dH = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt \qquad (3.20)$$

وبمقارنة المعادلة (3.19) مع المعادلة (3.20) نحصل على المعادلات الثلاث التالية:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad (3.21)$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad (3.22)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad (3.23)$$

وهذه المعادلات تُسمّى المعادلات الفيصلية للحركة (Canonical equations of motion) أو معادلات هاميلتون للحركة . كما يمكن كتابة المعادلة (3.20) على الشكل التالي :

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (3.24)$$

و باستخدام المعادلات (3.21-3.23) نحصل على :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (3.25)$$

إذا كانت دالة لاجرانج لا تحتوي على الزمن صراحة ، فإنّ دالة هاميلتون كذلك لا تحتوي على الزمن صراحة ، وهذا يعني أنّ :

$$\frac{dH}{dt} = 0 \qquad (3.25)$$

أي أنّ دالة هايلتون في هذه الحالة تكون ثابت حركة .

مثال (3.2)

جد معادلات الحركة لجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة ، ثمّ جد دالة الإزاحة بدلالة الزمن ، مستخدما طريقة هاميلتون ؟

الحل :

تعطى طاقة الحركة لجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة بالعلاقة التالية :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

وطاقة الوضع بالعلاقة التالية :

$$V = \frac{1}{2} k x^2$$

فتكون دالة لاجرانج على النحوالتالي :

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

و من تعريف الزخم الخطي :

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

62

و منها فإنّ :

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

ومن المعادلة (3.18) نحصل على دالة هاميلتون التالية :

$$H = p_x \dot{x} - L = p_x \dot{x} - \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$H(p_x, x) = \frac{p_x^2}{m} - \frac{1}{2} m \frac{p_x^2}{m^2} + \frac{1}{2} k x^2$$

$$H(p_x, x) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2$$

و باستخدام المعادلات الفيصلية للحركة ، نكتب معادلات الحركة على النحو التالي :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$$

نشتق المعادلة الأولى بالنسبة للزمن ، ثمّ نعوض قيمة $\dot{p}_x$ من المعادلة الثانية ، فنحصل على المعادلة التفاضلية التالية :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

وحلها يعطى بالعلاقة التالية :

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

حيث :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

مثال (3.3)

إذا علمت أنّ دالة لاجرانج هي :

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - \frac{1}{2} k q_2^2$$

فجد :

1) دالة هاميلتون H ، 2) الإحداثيات الدورية ، 3) معادلات هاميلتون ، والحل العام لها ، 4) اذكر ثوابت الحركة ؟

الحل :

1) باستخدام العلاقة (3.18) نحصل على :

$$H = \dot{q}_1 p_1 + \dot{q}_2 p_2 + \dot{q}_3 p_3 - L$$

و باستخدام تعريف الزخم العام :

$$p_1 = m\,\dot{q}_1 \ ,\ p_2 = m\,\dot{q}_2 \ ,\ p_3 = m\,\dot{q}_3$$

أي أنّ :

$$\dot{q}_1 = \frac{p_1}{m}\ ,\ \ \dot{q}_2 = \frac{p_2}{m}\ ,\ \ \dot{q}_3 = \frac{p_3}{m}$$

نحن نعرف بأنّ دالة هاميلتون هي دالة تعطى بدلالة الإحداثيات المعمّمة ، والزخم المعمّم ، لذلك نعوض قيم $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$ في دالة هاميلتون فنحصل على ما يلي:

$$H = \frac{p_1^2}{m} + \frac{p_2^2}{m} + \frac{p_3^2}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p_1^2}{m^2} + \frac{p_2^2}{m^2} + \frac{p_3^2}{m^2}\right) + \frac{1}{2}k\,q_2^2$$

$$= \left(\frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m}\right) + \frac{1}{2}k\,q_2^2$$

2) الإحداثيات الدورية هي q_1 و q_3 لأنّ

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial L}{\partial q_3} = 0$$

3) معادلات هاميلتون للحركة مع الحل العام لها :

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m}\ ,\ \ \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$$

إذن :

$$\ddot{q}_1 = \frac{\dot{p}_1}{m} = 0$$

أي أنّ :

$$q_1 = c_1 t + c_2$$
$$p_1 = c_1 m$$

و معادلات الحركة بالنسبة للإحداثي q_2 هي :

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m}\ ,\ \ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -k\,q_2$$

و ببساطة نحصل على :

$$\ddot{q}_2 = \frac{\dot{p}_2}{m} = -\frac{k}{m}q_2$$

أي أنّ :

$$\ddot{q}_2 + \frac{k}{m}q_2 = 0$$

و حل هذه المعادلة هو :

$$q_2 = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

حيث :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

و بتعويض قيمة q_1 في المعادلة الثانية نحصل على :

$$\dot{p}_2 = -kA\cos\omega t - kB\sin\omega t$$

و بمكاملة طرفي المعادلة بالنسبة للزمن نجد :

$$p_2 = -\frac{kA}{\omega}\sin\omega t + \frac{kB}{\omega}\cos\omega t$$

و معادلات الحركة المقابلة للإحداثي المعمّم q_3 هي :

$$\dot{q}_3 = \frac{\partial H}{\partial p_3} = \frac{p_3}{m} \ , \ \dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial q_3} = 0$$

إذن :

$$\ddot{q}_3 = 0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} q_3 = c'_1 t + c'_2 \\ p_3 = m c'_1 \end{cases}$$

4) ثوابت الحركة p_1 و p_3 و H

$$\dot{p}_1 = 0 \ , \ \dot{p}_3 = 0$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

مثال (3.4)

إستخدم طريقة هاميلتون لإيجاد معادلات حركة جسيم يتحرك على سطح إسطوانة معرّفة بالمعادلة التالية :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

حيث يخضع هذا الجسيم لقوة باتجاه نقطة الأصل تتناسب طرديا مع بعد الجسيم عن نقطة الأصل

$$\vec{F} = -k\vec{r}$$

الحل :

طاقة الوضع المصاحبة لهذه القوة هي :

$$V = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$= \frac{1}{2}k(R^2 + z^2)$$

نحن نعرف أنّ مربّع السرعة في الإحداثيات الإسطوانية هو :

$$v^2 = (\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

لكن في هذا المثال حركة الجسيم مقيدة على سطح الإسطوانة أي أنّ : $\rho = R$ ،
لذلك طاقة الحركة تعطى بالعلاقة التالية :

$$T = \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

إذن دالة لاجرانج :

$$L = \frac{1}{2} m \left(R^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{1}{2} k \left(R^2 + z^2\right)$$

الإحداثيات المعمّمة هي θ و z ، و الزخوم المعمّمة المصاحبة لهذه الإحداثيات p_θ و p_z يمكن إيجادهما بدلالة $\dot{\theta}$ و $\dot{z}$ كما يلي :

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m R^2 \dot{\theta}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z}$$

و باستخدام العلاقة (3.18) نحصل على دالة هاميلتون H

$$H = p_\theta \dot{\theta} + p_z \dot{z} - \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\theta} + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} k (R^2 + z^2)$$

و بتعويض قيمة $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m R^2}$ و قيمة $\dot{z} = \frac{p_z}{m}$ في هذه الدالة نحصل على :

$$H = \frac{p_\theta^2}{2 m R^2} + \frac{p_z^2}{2 m} + \frac{1}{2} k (R^2 + z^2)$$

و باستخدام معادلات هاميلتون ، نحصل على معادلات الحركة لهذا النظام و هي كما يلي :

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m R^2}$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}$$

$$\dot{p}_\theta = - \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

$$\dot{p}_z = - \frac{\partial H}{\partial z} = - kz$$

و نستنتج من المعادلات السابقة أنّ الزخم الزاوي حول المحور z ، هو كمية ثابتة ، و الحركة في إتجاه المحور z ، هي حركة توافقية بسيطة .

$$\ddot{z} = - \frac{k}{m} z \Rightarrow \ddot{z} + \omega^2 z = 0$$

حيث :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

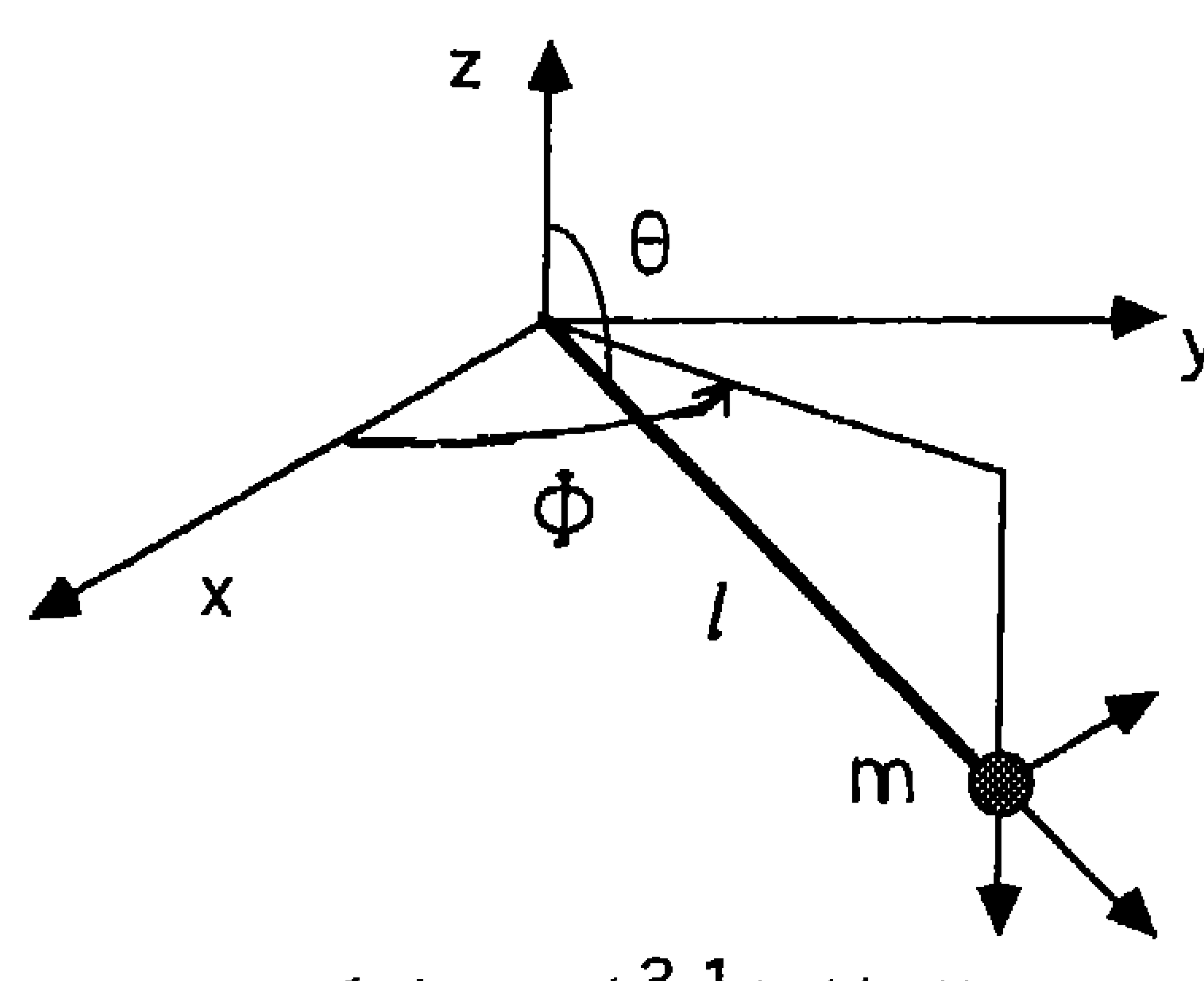
مثال (3.5)

في الشكل (3.1) بندول كروي طوله l و كتلته m . جد معادلات هاميلتون لهذا البندول الكروي ؟

الحل :

طاقة الحركه في الإحداثيات الكروية هي :

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\Phi}^2)$$



الشكل (3.1) :بندول كروي

لكن :

$$\dot{r} = 0 \quad \text{و} \quad r = l$$

إذن :

$$T = \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2 \theta \dot{\Phi}^2)$$

الإحداثيات المعمّمة هي : θ و Φ

إذا اعتبرنا نقطة تعليق البندول هي نقطة الأصل ، فإنّ طاقة الوضع هي :

$$V = - mgl \cos \theta$$

حيث إنّ القوة الوحيدة التي تؤثر على البندول هي قوة الجاذبية الأرضية .

نستطيع الآن كتابة دالة لاجرانج كما يلي :

$$L = \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2 \theta \dot{\Phi}^2) + mgl \cos\theta$$

لذلك

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m \, l^2 \dot{\theta}$$

$$p_\Phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} = m \, l^2 \sin^2 \theta \dot{\Phi}$$

من هاتين المعادلتين نستطيع تحديد قيم $\dot{\theta}$ و $\dot{\Phi}$ بدلالة p_θ و p_Φ و نجد دالة هاميلتون (H) كما يلي :

$$H = p_\theta \dot{\theta} + p_\Phi \dot{\Phi} - L$$

$$H = \frac{p^2{}_\theta}{2m\ell^2} + \frac{p^2{}_\Phi}{2m\ell^2 \sin^2\theta} - mg\ell \cos\theta$$

تحسب معادلات الحركة كما سيتضح من المعادلات التالية :

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m\ell^2}$$

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\Phi} = \frac{p_\Phi}{m\ell^2 \sin^2\theta}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p^2{}_\Phi \cos\theta}{m\ell^2 \sin^3\theta} - mg\ell \sin\theta$$

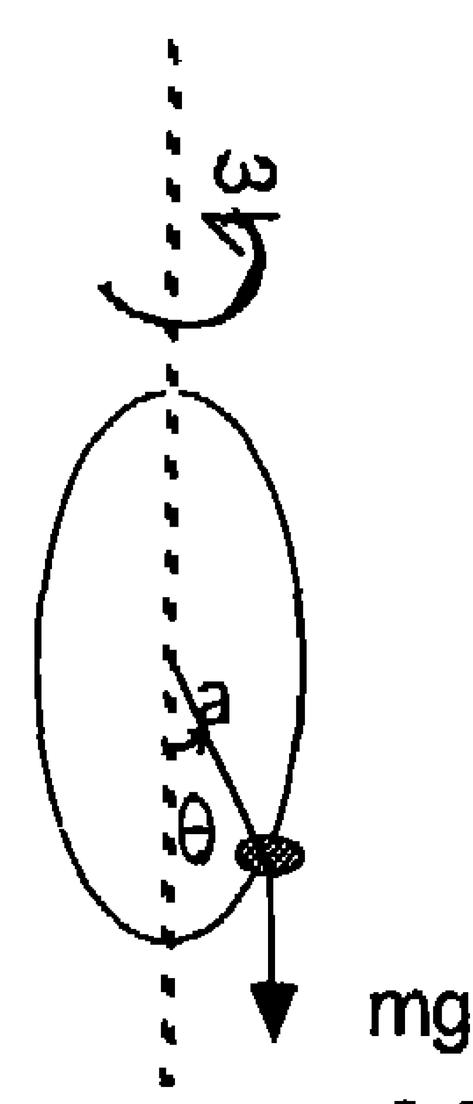
$$\dot{p}_\Phi = -\frac{\partial H}{\partial \Phi} = 0$$

حيث Φ إحداثي دوري و الزخم p_Φ هو ثابت حركة .

مثال (3.6)

خرزة كتلتها m تنزلق بدون احتكاك على حلقة دائرية نصف قطرها a . تقع الحلقة في المستوى الرأسي ، و هي مقيدة الحركة لتدور حول قطرها العمودي كما في الشكل (3.2) بسرعة زاوية ثابته مقدارها ω .جد

أ) دالة هاميلتون ، ب) معادلات الحركة الفيصلية ؟



الشكل (3.2) :خرزة تنزلق على حلقة

الحل :

سنعتمد هنا الإحداثيات الكروية ؛ لأنّ الحلقة تدور ، لذلك تكون طاقة الحركة

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\Phi}^2)$$

لكن $r = a$ و $\dot{r} = 0$ ، و بما أنّ الحلقة تدور بسرعة زاوية ثابتة ، إذن $\dot{\Phi} = \omega$ أي أنّ :

$$T = \frac{1}{2} m (a^2 \dot{\theta}^2 + a^2 \sin^2 \theta \, \omega^2)$$

و طاقة الوضع هي :

$$V = - mg \, a \cos\theta$$

فتكون دالة لاجرانج كما يلي :

$$L = \frac{1}{2} m (a^2 \dot{\theta}^2 + a^2 \omega^2 \sin^2 \theta) + mg \, a \cos\theta$$

لدينا إحداثي معمّم واحد θ .

لذلك تحسب دالة هاميلتون كما يلي :

$$H = \dot{\theta} p_\theta - L$$

حيث :

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m \, a^2 \dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m \, a^2}$$

وبتعويض قيمة $\dot{\theta}$ في دالة هاميلتون نجد :

$$H = \frac{p^2_\theta}{m a^2} - \frac{1}{2} m a^2 \frac{p^2_\theta}{m^2 a^4} - \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \sin^2\theta - mg \, a \cos\theta$$

$$= \frac{p^2_\theta}{2m a^2} - \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \sin^2\theta - mg \, a \cos\theta$$

معادلات الحركة هي :

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ma^2}$$

$$\dot{p}_\theta = - \frac{\partial H}{\partial \theta}$$

$$\dot{p}_\theta = m \, a^2 \omega^2 \sin\theta \cos\theta - mg \, a \sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{p}_\theta}{m a^2} = \omega^2 \sin\theta \cos\theta - \frac{g}{a} \sin\theta$$

إذا كانت θ صغيرة جداً ، فإنّ $\sin\theta \approx \theta$ و $\cos\theta \approx 1$ أي أنّ :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)\theta = 0$$

3.4*القوى الكهرومغناطيسية و طاقة الوضع التي تعتمد على السرعة (Electromagnatic Forces and Velocity dependent potential)

سندرس هنا الأنظمة الديناميكية المتأثرة بقوى تعتمد على السرعة ، أي أنّ طاقة الوضع تكون دالة بدلالة الإحداثيات و السرعة . حيث إنّ مثل هذه الدّالة يمكن إيجادها من المعادلة التالية :

$$Q_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad , k = 1 , 2 , \dots , n \tag{3.27}$$

و بالتالي دالة لاجرانج تأخذ الشكل التالي :

$$L = T - U \tag{3.28}$$

و معادلة الحركة هي :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad , k = 1 , 2 , \dots , n \tag{3.29}$$

مثال (3.7)

جسيم مشحون بشحنة مقدارها q ، خاضع لقوة كهرومغناطيسية معطاة بالعلاقة التالية :

$$\vec{F} = q\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\right\}$$

التي تسمى قوة لورنتز (Lorentz Force) حيث $\vec{E}$ المجال الكهربائي و $\vec{B}$ المجال المغناطيسي ، جد دالة هاميلتون .

الحل :

إنّ معادلات ماكسويل (Maxwell equations) في وحدات جاوس (Gaussian units) تكتب كما يلي :

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

$$\nabla . \vec{D} = 4\pi\rho$$

$$\nabla . \vec{B} = 0$$

و بما أنّ $\nabla . \vec{B} = 0$ إذن $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ حيث $\vec{A}$ الجهد المغناطيسي المتجهي

و بتعويض قيمة $\vec{B}$ Magnatic vector potential في معادلة ماكسويل ، نحصل على :

$$\nabla x\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)=0$$

وهذا يعني أنّ :

$$\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}=-\nabla\Phi$$

حيث

$$\nabla \times \nabla\Phi=0$$

إذن :

$$\vec{E}=-\nabla\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

و بالتعويض في معادلة لورنتز نحصل على :

$$\vec{F}=q\left\{-\nabla\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}+\frac{1}{c}\left(\vec{v}\times\nabla\times\vec{A}\right)\right\}$$

لنأخذ بعين الاعتبار المركبة السينية (x)

$$F_x=q\left\{-\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}_x}{\partial t}+\frac{1}{c}\left(\vec{v}\times\nabla\times\vec{A}\right)_x\right\}$$

لكن

$$\left(\vec{v}\times\nabla\times\vec{A}\right)_x=\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

و بطرح و إضافة الحد $\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}$ للمعادلة السابقة نحصل على :

$$\left(\vec{v}\times\nabla\times\vec{A}\right)_x=\dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x}+\dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}+\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}-\dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y}-\dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}-\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}$$

و بما أنّ :

$$\frac{dA_x}{dt}=\frac{\partial A_x}{\partial t}+\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}$$

إذن :

$$-\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}-\dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y}-\dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}=-\frac{dA_x}{dt}+\frac{\partial A_x}{\partial t}$$

و بعد ذلك نحصل على :

$$\left(\vec{v}\times\nabla\times\vec{A}\right)_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{y}A_y+\dot{z}A_z+\dot{x}A_x\right)-\frac{dA_x}{dt}+\frac{\partial A_x}{\partial t}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{v}.\vec{A}\right)-\frac{dA_x}{dt}+\frac{\partial A_x}{\partial t}$$

وبتعويض هذه القيمة في المركبة السينية للقوة F_x نحصل على :

$$F_x = q\left\{ -\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{v}.\ \vec{A}\right) - \frac{1}{c}\frac{dA_x}{dt} \right\}$$

و يمكن كتابة هذه المركبة على الصورة :

$$F_x = q\left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{c}\vec{v}.\ \vec{A} - \Phi\right) - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\vec{v}.\ \vec{A}\right)\right) \right\}$$

حيث

$$\vec{v}.\ \vec{A} = \dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z$$

و بما أنّ :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}} = 0$$

إذن نستطيع كتابة F_x كما يلي :

$$F_x = q\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi - \frac{1}{c}\ \vec{v}.\ \vec{A}\right) + \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial\dot{x}}\left(\Phi - \frac{1}{c}\ \vec{v}.\ \vec{A}\right)\right\}\right]$$

و نحن نعرف من المعادلة (3.27) أنّ :

$$F_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial U}{\partial x}$$

إذن بالمقارنة نجد :

$$U = q\Phi - \frac{q}{c}\ \vec{v}.\ \vec{A}$$

و باستخدام المعادلة (3.28) نحصل على دالة لاجرانج

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - q\Phi + \frac{q}{c}\ \vec{v}.\ \vec{A}$$

هنا الطاقة الحركية تساوي :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

و باستخدام تعريف الزخم الخطي المعمّم ، نحصل على :

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = m\dot{x} + \frac{q}{c}A_x$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial\dot{y}} = m\dot{y} + \frac{q}{c}A_y$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial\dot{z}} = m\dot{z} + \frac{q}{c}A_z$$

لكن دالة هاميلتون تعطى بالعلاقة التالية :

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - L$$

وبتعويض قيم $\dot{z}$ و $\dot{y}$ و $\dot{x}$ في هذه الدالة نجد :

$$H = p_x\left(\frac{p_x - \frac{q}{c}A_x}{m}\right) + p_y\left(\frac{p_y - \frac{q}{c}A_y}{m}\right) + p_z\left(\frac{p_z - \frac{q}{c}A_z}{m}\right)$$

$$-\frac{1}{2}m\left\{\frac{\left(p_x - \frac{q}{c}A_x\right)^2}{m^2} + \frac{\left(p_y - \frac{q}{c}A_y\right)^2}{m^2} + \frac{\left(p_z - \frac{q}{c}A_z\right)^2}{m^2}\right\}$$

$$-\frac{q}{c}A_x\left(\frac{p_x - \frac{q}{c}A_x}{m}\right) - \frac{q}{c}A_y\left(\frac{p_y - \frac{q}{c}A_y}{m}\right) - \frac{q}{c}A_z\left(\frac{p_z - \frac{q}{c}A_z}{m}\right) + q\Phi$$

و بتجميع الحدود نحصل على الصورة التالية :

$$H = \frac{\left(p_x - \frac{q}{c}A_x\right)^2}{2m} + \frac{\left(p_y - \frac{q}{c}A_y\right)^2}{2m} + \frac{\left(p_z - \frac{q}{c}A_z\right)^2}{2m} + q\Phi$$

و التي يمكن كتابتها كما يلي :

$$H = \frac{\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2}{2m} + q\Phi$$

****

أسئلة عامة وحلول جزئية

1ـ جسيم كتلته m مجذوب بقوة مقدارها $\frac{k}{r^2}$ حيث k ثابت ، نحو نقطة محددة .

جد دالة هاميلتون و معادلات الحركة . استخدم الإحداثيات القطبية ؟

الحل الجزئي :

طاقة الحركة :

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

و طاقة الوضع :

$$V = -\frac{k}{r}$$

$$p_r = m\dot{r}\ ,\ p_\theta = mr^2\dot{\theta}$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r}$$

معادلات الحركة :

$$\dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{k}{r^2}\ ,\ \dot{p}_\theta = 0$$

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}\ ,\ \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

2 ـ أعد حل السؤآل السابق باستخدام الإحداثيات المتعامدة .

الحل الجزئي :

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$$

$$V = -\frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

3 ـ سقط جسيم كتلته m ، سقوطاً حراً تحت تأثير الجاذبية الأرضية . جد دالة هاميلتون و معادلات الحركة ودالة الموضع بدلالة الزمن ؟

الحل الجزئي :

$$V = mgy \, , \, T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

$$H = \frac{p_y^2}{2m} + mgy$$

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m} \, , \, \dot{p}_y = -mg$$

$$\ddot{y} = -g \Rightarrow y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

حيث v_0 و y_0 ثابتان و يمثلان السرعة الابتدائية و الموضع الابتدائي على الترتيب .

4 ـ جسيم كتلته m يتحرك في ثلاثة أبعاد تحت تأثير الجاذبية الأرضية . جد معادلات الحركة باستخدام دالة هاميلتون ، ثم حدّد الإحداثيات الدورية و أذكر ثوابت الحركة ؟

الحل الجزئي :

$$V = mgz \, , \, T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + mgz$$

$$\ddot{x} = 0 \, , \, \ddot{y} = 0 \, , \, \ddot{z} = -g$$

الإحداثيات الدورية x و y ، ثوابت الحركة H و p_x و p_y .

5 ـ قضيب منتظم كتلته M وطوله 2ℓ ، عُلّق أحد طرفيه بواسطة زنبرك ثابت مرونته k . إذا تأرجح القضيب في المستوى العمودي و الزنبرك مقيد الحركة في الإتجاه العمودي . جد دالة هاميلتون لهذا النظام و حدد معادلات الحركة ؟

الحل الجزئي :

$$T = \frac{1}{2} M \left(\dot{x}^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2 - 2\ell \sin\theta \, \dot{\theta} \, \dot{x}\right) + \frac{1}{2} I_{bar} \dot{\theta}^2$$

$$I_{bar} = \frac{1}{3} M \ell^2$$

$$V = -Mg(x + l\cos\theta) + \frac{1}{2}kx^2$$

$$H = \frac{1}{M(\frac{4}{3} - \sin^2\theta)}\left[\frac{2}{3}p_x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{p_\theta}{l}\right)^2 - p_x \sin\theta \frac{p_\theta}{l}\right] - Mg(x + l\cos\theta) + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\dot{x} = \frac{\frac{4}{3}p_x + \sin\theta \frac{p_\theta}{l}}{M(\frac{4}{3} - \sin^2\theta)}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\frac{p_\theta}{l^2} + \frac{p_x}{l}\sin\theta}{M(\frac{4}{3} - \sin^2\theta)}$$

$$\dot{p}_x = Mg - kx$$

$$\dot{p}_\theta = \frac{-\cos\theta}{M(\frac{4}{3} - \sin^2\theta)^2}\left[\sin\theta\left\{4p_x^2 + \left(\frac{p_\theta}{l}\right)^2\right\} + \left(\frac{4}{3} + \sin^2\theta\right)\frac{p_\theta p_x}{l}\right] + Mg\, l \sin\theta$$

6 - يتحرك جسيم تحت تأثير قوة تؤثر باتجاه المركز قيمتها تعطى بالعلاقة التالية :

$$F = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2\ddot{r}\,r}{c^2}\right)$$

الحل الجزئي :

حيث r بعد الجسيم عن مركز القوة .جد دالة هاميلتون لهذا الجسيم .

$$U = -\frac{1}{r}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$H = \frac{p_r^2}{2m\left(1 + \frac{2}{mc^2 r}\right)} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{1}{r}$$

$$F = \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{r}}\right)$$

****

الفصل الرابع

حسبان التغاير

(Calculus of Variations)

4.1* بعض الأساليب التقنية في حسبان التغاير
(Certain Techniques in the calculus of variations)

هناك بعض المسائل التي تُطرح في مجال الفيزياء الرياضية و هي :
إذا كان لدينا دالة F مُعرّفة بدلالة المتغير المستقل x و المتغير التابع y و مشتقته $y' \equiv \frac{dy}{dx}$ أي أنّ :

$$F \equiv F\left(x\,,\ y\,,\ \frac{dy}{dx}\right) \qquad (4.1)$$

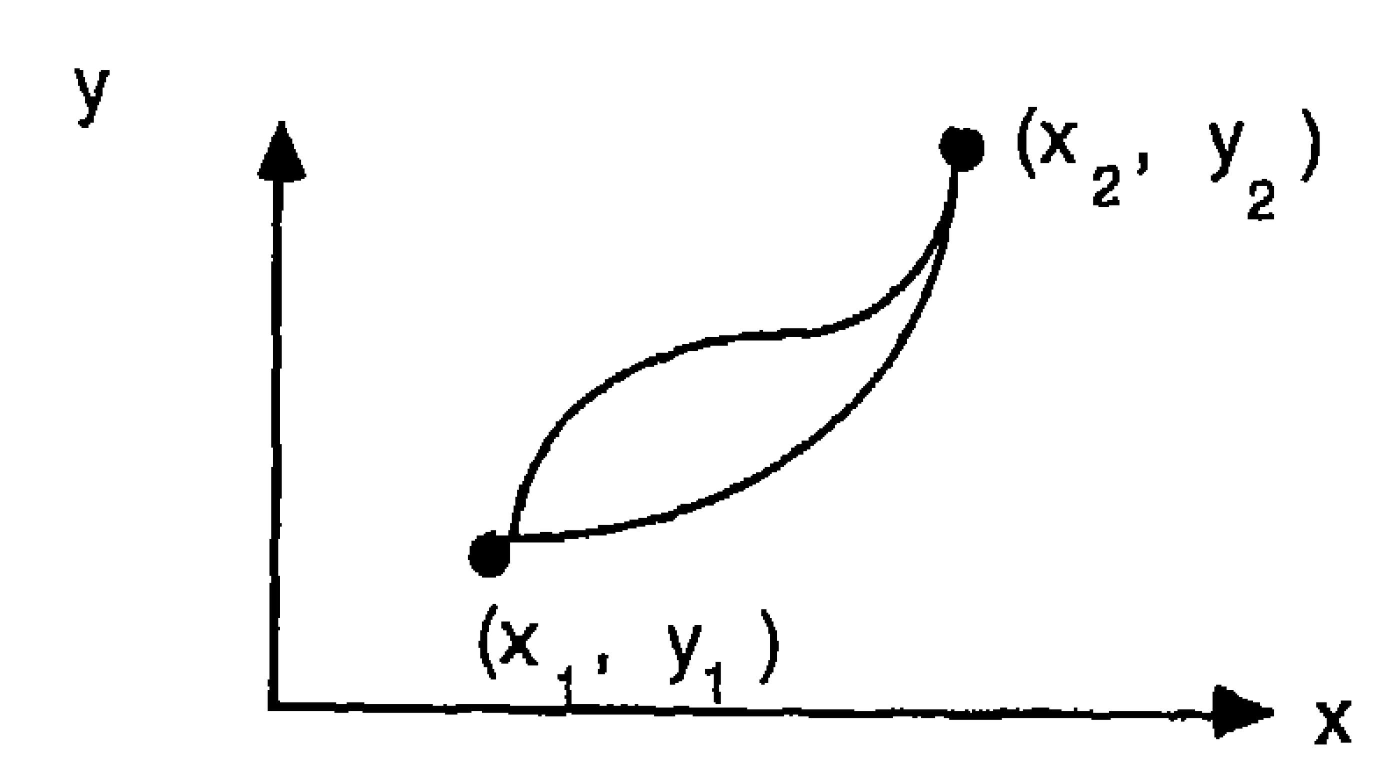
فكيف يمكن تحديد المنحنى الذي يصل بين النقطتين $x = x_1$ و $x = x_2$ ، و الذي يربط بين المتغير ين y و x ؟ أي :

$$y = y(x) \qquad (4.2)$$

مثل هذه المسألة يمكن حلّها بتعريف التكامل التالي :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\ dx \qquad (4.3)$$

بحيث يكون لهذا التكامل قيمة عظمى أو صغرى (قيمة قصوى Stationary value) .



الشكل (4.1) :مسارات متباينة بين نقطتين ثابتتين

المنحنى (4.1) يُسمّى منحنى نهاية قصوى (عظمى أو صغرى) و الشرط الضروري لكي تكون لهذا التكامل نهاية عظمى أو نهاية صغرى هو : أن يكون التغاير لهذا التكامل مساوياً للصفر . لنعتبر فقط المسارات المتغيرة بحيث $y(x_1) = y_1$ و $y(x_2) = y_2$. و نستطيع تركيب الدّالة التي تمثل هذه

المنحنيات المتغيرة بالطريقة التالية :

لنفرض أنّ $\eta(x)$ هي دالة معطاة بدلالة x بحيث تكون قيمتها صفرا عند النقطتين x_1 و x_2 و مشتقتها الثانية متصلة على الفترة $[x_1 ، x_2]$ ، و اختيارية في أي مكان آخر . يمكننا الآن تعريف الدّالة بالمعادلة التالية :

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x) \quad (4.4)$$

حيث $y(x)$ المنحنى الذي يحتوي على القيمة القصوى و ε هي مقدار صغير جداً . و باشتقاق المعادلة (4.4) نحصل على :

$$Y'(x) = y'(x) + \varepsilon\eta(x) \quad (4.5)$$

إذن نستطيع كتابة التكامل $I(\varepsilon)$ كما يلي :

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(x,Y,Y')\, dx \quad (4.6)$$

حيث Y و Y' دوال بدلالة ε . وحتى يكون لهذا التكامل قيم قصوى يجب أن تتحقق المعادلة التالية :

$$\frac{d\, I(\varepsilon)}{d\, \varepsilon} = 0$$

عندما $\varepsilon = 0$. وباشتقاق المعادلة (4.6) نحصل على :

$$\frac{d\, I(\varepsilon)}{d\, \varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{dY}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial Y'} \frac{dY'}{d\varepsilon} \right) dx \quad (4.7)$$

وبتعويض (4.4) و(4.5) في (4.7) نحصل على :

$$\frac{d\, I(\varepsilon)}{d\, \varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial Y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial Y'} \eta'(x) \right] dx \quad (4.8)$$

عندما $\varepsilon = 0$ فإنّ $Y = y$ وهذا يؤدي إلى :

$$\left| \frac{d\, I(\varepsilon)}{d\, \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx = 0 \quad (4.9)$$

و إذا كانت y'' متصلة ، نستطيع مكاملة الحد الثاني بالأجزاء كما يلي :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x)\, dx = \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta(x)\, dx = 0 \quad (4.10)$$

لكن :

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$

إذن :

$$\left|\frac{d\,I(\varepsilon)}{d\,\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right|\eta(x)\,dx=0 \tag{4.11}$$

وبما أنّ $\eta(x)$ هي دالة اختيارية بدلالة x لا يمكن أن تكون دائماً صفراً ، إذن :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0 \tag{4.12}$$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة أويلر(Euler equation) .

يمكن حل أي مسألة في حسبان التغاير بتحديد التكامل (4.6) و معرفة الدّالة F بحيث يكون لهذا التكامل قيم قصوى و من ثَمَّ نعوض هذه الدّالة في المعادلة (4.12) و نجد نتيجة هذه المعادلة التفاضلية .

مثال (4.1)

جد أقصر مسافة بين نقطتين في المستوى xy باستخدام حسبان التغاير ؟

الحل :

إنّ عنصر الطول القوسي (Element of Arc length) في المستوى xy يُعطى بالمعادلة :

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

حيث :

$$\frac{dy}{dx}=y'$$

و الطول الكلي بين أي نقطتين هو :

$$I=\int_1^2 ds=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx\equiv\int_{x_1}^{x_2}F\,dx$$

حيث $F=\sqrt{1+y'^2}$. وحتى يكون للمسار قيمة صغرى (أقصر مسار) يجب على الدالة أن تحقق معادلة أويلر (4.12) . إذن :

$$\frac{\partial F}{\partial y}=0\ ,\ \frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

و بالتعويض في المعادلة (4.12) نحصل على :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=0$$

أو

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=c$$

حيث c ثابت . و هذا الحل يكون مقبولا إذا كانت

$$y'=a$$

حيث a ثابت يعطى بدلالة c

$$a = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$$

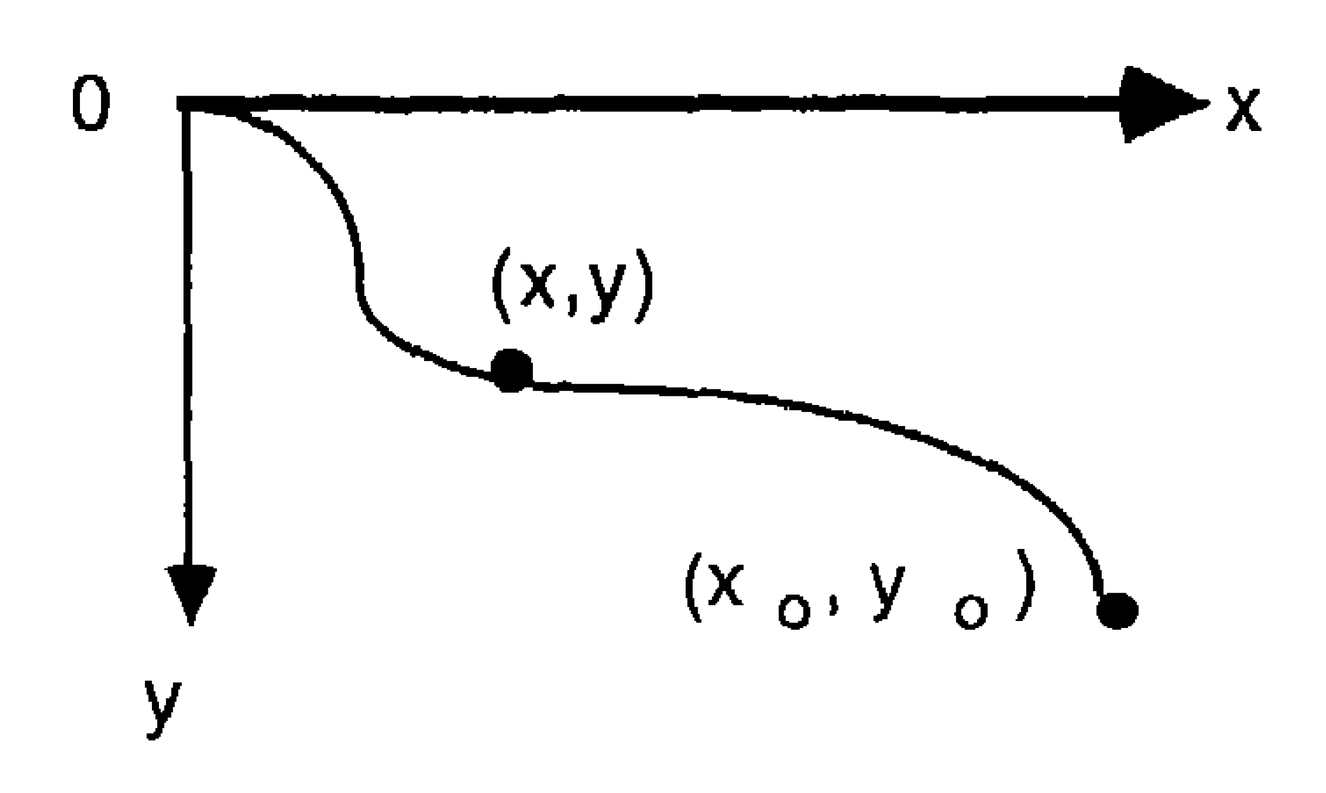
و بمكاملة المعادلة $y' = a$ بالنسبة لـ x نحصل على :

$$y = ax+b'$$

حيث b ثابت آخر ، وهذا يعني أنّ أقصر مسافة بين نقطتين هي خط مستقيم .

مثال (4.2)

ينزلق جسيم من السكون من نقطة ما على سلك أملس – يقع في مستوى رأسي – إلى نقطة أخرى بتأثير الجاذبية الأرضية . انظر الشكل (4.2) . جد معادلة المنحنى الذي يحدد شكل السلك بحيث يكون الزمن اللاّزم لقطع المسافة أقل ما يمكن ؟.



الشكل (4.2) :خرزة تنزلق على سلك أملس

الحل :

لنفرض أنّ نقطة البداية هي نقطة الأصل ونقطة النهاية هي (x_0 , y_0) ، لنعتبر أن الجسم عند النقطة (x , y) ، حيث تكون سرعته اللحظية عند الزمن t هي : $\frac{ds}{dt}$ ، حيث الطول القوسي يساوي s . وباستخدام مبدأ حفظ الطاقة نحصل على المعادلة التالية :

$$mg\, y = \frac{1}{2} m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

على افتراض أنّ طاقة وضع الجسيم تساوي صفر عند نقطة الأصل . و منها نحصل على :

$$ds = \sqrt{2g\, y}\; dt$$

أو :

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g\, y}}$$

و الزمن الكلي τ اللازم لانزلاق الجسيم من $y = 0$ إلى $y = y_0$ هو :

$$\tau = \int_0^{\tau} dt = \int_{y=0}^{y_0} \frac{ds}{\sqrt{2g\, y}}$$

لكن من المثال السابق تبين أنّ :

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\ dx$$

إذن :

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y=0}^{y_0} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y=0}^{y_0} F dx$$

حيث

$$F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

و حتى يكون للزمن قيمة قصوى (صغرى) يجب أن تحقق الدالة F معادلة أويلر .

$$F = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}} (y)^{\frac{-1}{2}}$$

و منها :

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = (1+y'^2)^{\frac{-1}{2}}\ y' y^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-1}{2} (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}\ y^{\frac{-3}{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1+y'^2)^{\frac{-1}{2}}\ y' y^{\frac{-1}{2}}\right] + \frac{1}{2} (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}\ y^{\frac{-3}{2}} = 0$$

و باشتقاق ما بداخل القوس الكبير نجد أنّ :

$$(1+y'^2)^{\frac{-1}{2}} \left[y'' y^{\frac{-1}{2}} - \frac{1}{2} y'^2 y^{\frac{-3}{2}} \right] - (1+y'^2)^{\frac{-3}{2}} y'^2\ y''\ y^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{2} (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}\ y^{\frac{-3}{2}} = 0$$

و بإعادة ترتيب حدود هذه المعادلة نحصل على :

$$y''\ y^{\frac{-1}{2}} (1+y'^2)^{\frac{-1}{2}} \left[1 - (1+y'^2)^{-1} y'^2\right] + \frac{1}{2}\ y^{\frac{-3}{2}} (1+y'^2)^{\frac{-1}{2}} \left[- y'^2 + (1+y'^2)\right] = 0$$

أي أنّ :

$$y''\ y^{\frac{-1}{2}} (1+y'^2)^{\frac{-3}{2}} + \frac{1}{2}\ y^{\frac{-3}{2}} (1+y'^2)^{\frac{-1}{2}} = 0$$

نضرب طرفي المعادلة السابقة بالمقدار :

$$2\ y^{\frac{+3}{2}} (1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

فنحصل على المعادلة التالية :

$$y'^2 + 2y\, y'' + 1 = 0$$

إذن المنحنى الذي يحقق هذه المعادلة التفاضلية ، هو الطريق الذي يوصل الجسيم إلى النقطة $(x_0\ ,\ y_0)$ بأقل زمن ممكن .

مثال (4.3)

جد الجيوديسية (geodesics) على الإسطوانة $r = 1 + \cos\theta$ ؟ .

الحل :

في الإحداثيات الإسطوانية

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

بما أنّ :

$$r = 1 + \cos\theta$$

فإنّ :

$$dr = -\sin\theta \ d\theta$$

نعوض قيمة كل من dr و r في معادلة الإحداثيات الإسطوانية فنحصل على :

$$ds^2 = \sin^2\theta \, d\theta^2 + (1 + \cos\theta)^2 d\theta^2 + dz^2$$

$$= 2(1 + \cos\theta) \, d\theta^2 + dz^2$$

نجد القيمة الصغرى للتكامل $\int ds$ حتى نحسب الجيوديسية . أي أنّ :

$$\int ds = \int \sqrt{2(1 + \cos\theta) \, d\theta^2 + dz^2}$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{2(1 + \cos\theta) + z'^2} \, d\theta$$

حيث :

$$z' = \frac{dz}{d\theta}$$

إذن الدالة F تعطى بالعلاقة التالية :

$$F = \sqrt{2(1 + \cos\theta) + z'^2}$$

و معادلة أويلر هي :

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

و بتعويض قيمة F نجد أنّ :

$$k = \frac{z'}{\sqrt{2(1 + \cos\theta) + z'^2}}$$

و بتربيع طرفي المعادلة نحصل على :

$$z'^2 = k^2 \left(2 + 2\cos\theta + z'^2\right)$$

أي أنّ :

$$z'^2 = \frac{2k^2}{1 - k^2}\left(1 + \cos\theta\right)$$

$$z'^2 = A^2 \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)$$

حيث :

$$\frac{A^2}{2} = \frac{2\,k^2}{1 - k^2}$$

إذن :

$$z'^2 = A^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

و بصيغة أخرى :

$$z'^2 = A^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

و بمكاملة طرفي المعادلة نجد أنّ :

$$z = c + 2\,A \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

وهذا يعني أنّ الجيوديسية عبارة عن منحنيات تقاطع السطح $z = c + 2\,A \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)$ مع الإسطوانة المعطاة $r = 1 + \cos \theta$.

مثال (4.4)

جد معادلة المسار الذي يسلكه الشعاع الضوئي في وسط معامل انكساره يتناسب مع $r^{-1/2}$ ؟ .

الحل :

نجد القيم القصوى للتكامل التالي :

$$\int r^{-1/2}\, ds = \int r^{-1/2} \sqrt{d\,r^2 + r^2\, d\,\theta^2}$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} r^{-1/2} \sqrt{1 + r^2\, \theta'^2}\; d\,r$$

حيث :

$$\theta' = \frac{d\theta}{dr}$$

إذن :

$$F = \sqrt{\frac{1 + r^2\, \theta'^2}{r}}$$

و معادلة أويلر هي :

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$$

نعوض قيمة F فنحصل على :

$$k = \frac{r^2 \theta'}{\sqrt{r\left(1 + r^2 \theta'^2\right)}}$$

بتربيع طرفي المعادلة نجد أنّ :

$$r^3 \theta'^2 = k^2 \left(1 + r^2 \theta'^2\right)$$

إذن :

$$k^2 = r^2 \theta'^2 \left(r - k^2\right)$$

أي أنّ :

$$\theta' = \frac{k}{r\sqrt{r - k^2}}$$

و هذا يؤدي إلي أنّ :

$$d\theta = \frac{k\,dr}{r\sqrt{r - k^2}}$$

و بمكاملة طرفي المعادلة نجد :

$$\theta = k\int \frac{dr}{r\sqrt{r - k^2}} + c$$

حيث c ثابت . ومنها :

$$\theta = 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{r - k^2}{k^2}}$$

4.2* المتغيرات متعددة التوابع (Several Dependent Variables)

ليس من الضروري أن نحصر دراستنا في حسبان التغاير على المسائل التي تحتوي على متغير معتمد واحد مثل y ، بل من الممكن أن نوسع دراستنا لتشتمل على المسائل التي تحتوي عدة متغيرات معتمدة . في حساب المسائل العادية إنّ الشرط الضروري حتى تكون النقطة قيمة صغرى على المنحنى $z(x)$ هو أن تكون المشتقة الأولى بالنسبة لِ x مساوية للصفر ، $\frac{dz}{dx} = 0$. أمّا بالنسبة للدوال التي تحتوي على أكثر من متغير ، $z = z(x,y)$ ، فيوجد شرطان هما :

$$\frac{dz}{dy} = 0 \text{ و } \frac{dz}{dx} = 0$$

و نستخدم نفس الأسلوب في حسبان التغاير .

لنفرض أنّ الدّالة F معطاة بدلالة y و z و $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{dz}{dx}$ و x . نريد الآن الحصول على منحنيين $y = y(x)$ و $z = z(x)$ يجعلا ن التكامل (I) التالي :

$$I = \int F\,dx$$

حاويا على قيم قصوى . لذلك سيعتمد التكامل على كل من $y = y(x)$ و $z = z(x)$ ، و في هذه الحالة يوجد عندنا معادلتا أويلر إحداهما للمتغير y ، و الأخرى للمتغير z . و بشكل مفصّل تُكتب المعادلتان كما يلي :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad (4.14a)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \qquad (4.14b)$$

و من الممكن تعميم ذلك على المسائل التي تحتوي على عدد n من المتغيرات التابعة بحيث يكون في هذه الحالة لدينا n من معادلات أويلر .

4.3* مبدأ هاميلتون (Hamilton's Principle)

ينص هذا المبدأ على أنّ جسيما أو نظاما من الجسيمات تتحرك إذا كان للتكامل

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt \qquad (4.15)$$

قيمة أو قيم قصوى . علما بأنّ L هي دالة لاجرانج و تعطى بالعلاقة التالية :

$$L = T - V$$

حيث T طاقة الحركة ، وV طاقة الوضع للجسيم أو النظام . في الفصل الثاني قمنا باشتقاق معادلات لاجرانج آخذين بعين الإعتبار حالة لحظية للنظام (t) و ذلك باستخدام مبادىء التفاضل . و من الممكن كذلك أن نحصل على معادلات لاجرانج باستخدام مبدأ هاميلتون و ذلك بإجراء التكامل من اللحظة الزمنية t_1 إلى اللحظة t_2 كما في المعادلة (4.15) . و بشكل عام ، فإنّ دالة لاجرانج تعطى بدلالة q_k و $\dot{q}_k$ و t .

$$L = L\left(q_k, \dot{q}_k, t\right)$$

أي أنّ :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_k, \dot{q}_k, t\right) dt$$

هذه المعادلة هي نفس المعادلة (4.3) و لكن هنا عملنا الإنتقالات التالية :

$$F \longrightarrow L$$

$$y \longrightarrow q_k$$

$$y' \longrightarrow \dot{q}_k$$
$$x \longrightarrow t$$

لذلك نحصل على معادلات أويلر بنفس الطريقة التي عرضناها في بداية الفصل . أي أنّ :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

أسئلة و حلول جزئية

1-جد معادلة المسار الذي يسلكه شعاع ضوئي في وسط معامل إنكساره n يتناسب مع r^{-2} (الإحداثيات القطبية) ؟ .

الحل الجزئي :

$$\int n\, ds = \int r^{-2}\, ds = \int r^{-2}\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \int r^{-2}\sqrt{1 + r^2\theta'^2}\, dr$$

$$F = r^{-2}\sqrt{1 + r^2\theta'^2} \;,\; \theta' = \frac{d\theta}{dr}$$

معادلة أويلر هي :

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\theta'}{\sqrt{1 + r^2\theta'^2}}\right) = 0$$

بحل هذة المعادلة نحصل على :

$$\theta'^2 = k^2\left(1 + r^2\theta'^2\right) \Rightarrow \theta' = \frac{d\theta}{dr} = \frac{k}{\sqrt{1 - k^2 r^2}}$$

$$\theta = \arc\sin kr + \text{ثابت}$$

2-جد التكامل الأول لمعادلة أويلر بحيث يكون للتكامل التالي قيمة قصوى ؟ :

$$I = \int \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx \;,\; y' = \frac{dy}{dx}$$

الحل الجزئي :

$$\sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + x'^2}\, dy \;,\; x' = \frac{dx}{dy}$$

$$I = \int \frac{\sqrt{1 + x'^2}}{\sqrt{y}}\, dy \Rightarrow F(y\,,\,x') = \frac{\sqrt{1 + x'^2}}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = 0 \, , \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{x'}{\sqrt{y}\sqrt{1+x'^2}}\right) = 0$$

التكامل الأول

$$\frac{x'}{\sqrt{y}\sqrt{1+x'^2}} = \text{ثابت}$$

3-بإستخدام الإحداثيات الإسطوانية جد الجيوديسية (geodesics) على المخروط ؟ .

$$z^2 = 8(x^2 + y^2)$$

الحل الجزئي :

$$z^2 = 8\, r^2 \Rightarrow dz = \sqrt{8}\, dr$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 = 9\, dr^2 + r^2 d\theta^2$$

$$I = \int \sqrt{9 + r^2 \theta'^2}\, dr \, , \theta' = \frac{d\theta}{dr}$$

معادلة أويلر هي :

$$\frac{r^2\theta'}{\sqrt{9 + r^2\theta'^2}} = k = \text{ثابت}$$

$$\theta + \alpha = 3 \arccos \frac{k}{r} \, , \alpha = \text{ثابت}$$

$$r \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{3}\right) = k$$

4-جد معادلة المسار الذي يسلكة الشعاع الضوئي إذا كان معامل الإنكسار يتناسب مع $\sqrt{y}$ ؟ .

الحل الجزئي :

$$\int n\, ds = \int \sqrt{y}\; ds = \int \sqrt{y}\sqrt{1+x'^2}\; dy$$

$$F = \sqrt{y}\sqrt{1+x'^2}$$

بإستخدام معادلة أويلر نجد :

$$\frac{dx}{dy} = x' = \frac{k}{\sqrt{y - k^2}}$$

إذن :

$$(x-a)^2 = 4\, k^2 (y - k^2)$$

وهذة معادلة قطع زائد (parabola) .

5- جد الجيوديسية (geodesics) على الكرة ؟.

الحل الجزئي :

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2\theta \, d\Phi^2$$

حيث a نصف قطر الكرة .

$$\int ds = a\int \sqrt{1+\sin^2\theta \, \Phi'^2} \, d\theta$$

$$\Phi' = \frac{d\Phi}{d\theta}$$

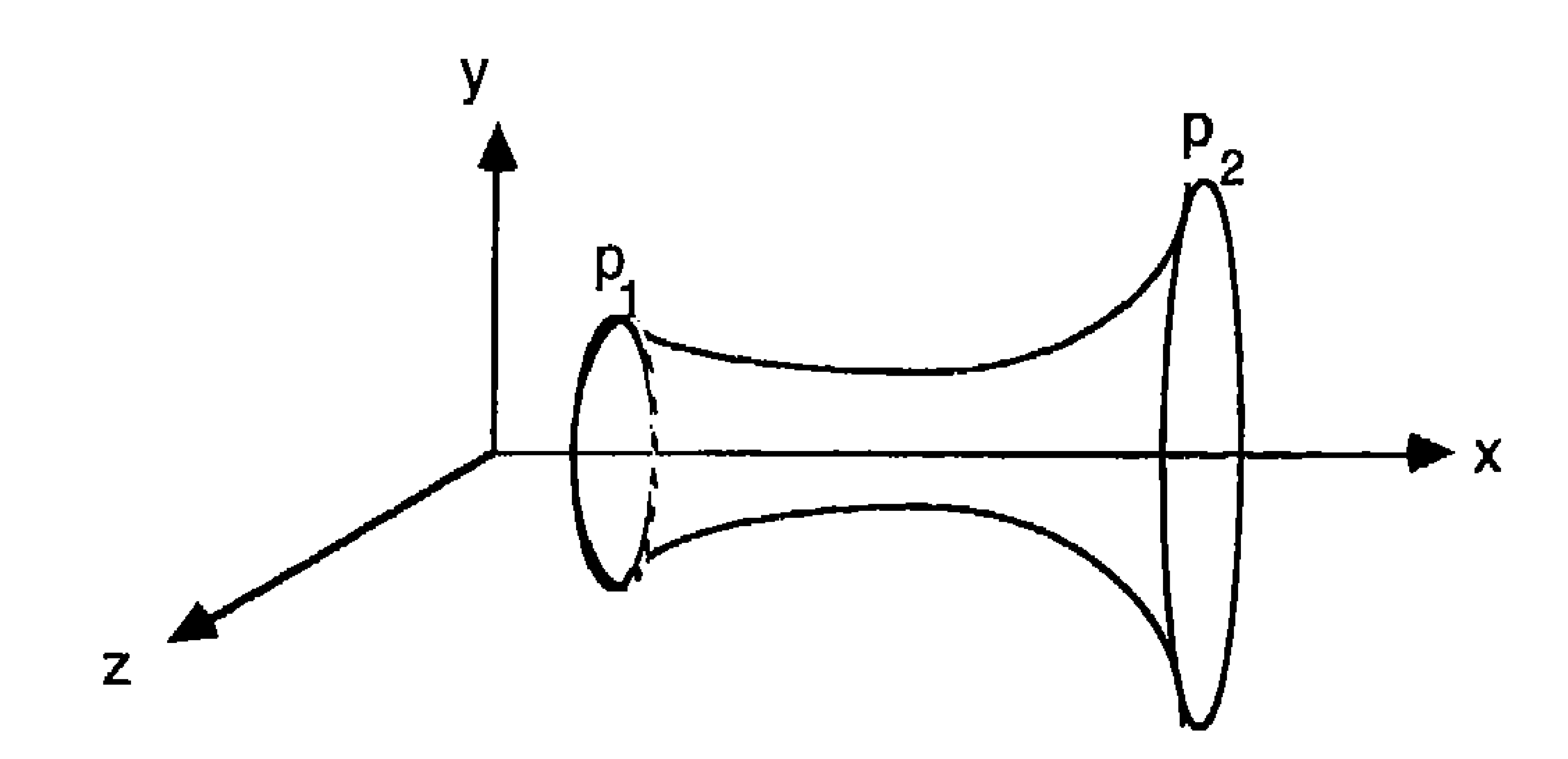
بإستخدام معادلة أويلرنجد :

$$\frac{\Phi' \sin^2\theta}{\sqrt{1+\Phi'^2 \sin^2\theta}} = k = \text{ثابت}$$

إذن :

$$\Phi' = \frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{k}{\sqrt{\sin^4\theta - k^2 \sin^2\theta}} = k = \text{ثابت}$$

6- إذا رسمنا منحنى يصل بين النقطتين p_1 و p_2 ، و دار هذا المنحنى حول المحور x بحيث يشكل سطحا دورانيا كما في الشكل (4.3) ، جد معادلة هذا المنحنى بحيث تكون مساحة السطح أقل ما يمكن ؟ .



الشكل (4.3) : منحنى يصل بين النقطتين p_1 و p_2 و مدار حول المحور x

الحل الجزئي :

المساحة

$$I = \int 2\pi y \, ds$$

$$x' = \frac{dx}{dy} \quad \text{حيث} \quad ds = \sqrt{1 + x'^2} \, dy$$

إذن :

$$I = \int 2\pi y \sqrt{1 + x'^2} \, dy$$

أي أنّ :

$$F = y\sqrt{1 + x'^2}$$

باستخدام معادلة أويلر نجد :

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{y\,x'}{\sqrt{1 + x'^2}}\right) = 0$$

إذن :

$$x = \int \frac{c_1}{\sqrt{y^2 - c_1^2}}\,dy + c_2 = c_1 \cosh^{-1}\frac{y}{c_1} + c_2$$

7- جد القيم القصوى للدالة التالية ؟ :

$$I\{y(x), z(x)\} = \int_{x_1}^{x_2} (y'^2 + z'^2 + 2yz)\,dx$$

الحل الجزئي :

$$F = y'^2 + z'^2 + 2yz$$

معادلات أويلر هي :

$$y'' - z = 0$$
$$z'' - y = 0$$

حل هذه المعادلات هو :

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$
$$z(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x$$

* * *

الفصل الخامس

الاهتزازات الصغيرة

(Small Oscillations)

5.0* المقدمة

تعتبر دراسة الاهتزازات الصغيرة ، وتحديد حالة استقرار الأنظمة الديناميكية من المسائل المهمّة في الفيزياء ، و مثال ذلك ، ذرات المادة في الحالة الصلبة ، فإنها تجذب بعضها البعض بقوة معينة ، و تهتز حول موضع الاتزان ، وهذه القوة تمثل بقوة المرونة في الزنبركات .

في هذا الفصل سوف ندرس حركة الأنظمة حول نقاط الاتزان .

5.1* طاقة الوضع و الاتزان (Potential and Equilibrium Energy)

حتى نفهم نظريا الاهتزازات البسيطة لابد من دراسة العلاقة بين طاقة الوضع و الاتزان التي تؤدي إلى حالة الاستقرار أو حالة عدم الاستقرار للنظام الفيزيائي ، لذلك دعنا نعتبر أنّ النظام الفيزيائي يتكون من n درجة حرية و محدد بالإحداثيات المعمّمة التالية :

$$q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n \qquad (5.1)$$

لنفرض أنّ هذا النظام محافظ ؛ إذن طاقة الوضع :

$$V = V(q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n)$$

و القوى المعمّمة Q_k تعطى بالعلاقة التالية :

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (5.2a)$$

نقول أنّ هذا النظام في حالة اتزان ؛ إذا كانت القوى المعمّمة تساوي الصفر ، أي أنّ :

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \qquad (5.2b)$$

يبقى النظام في حالة سكون مالم تؤثر عليه قوة خارجية ، و إذا أزيح إزاحة صغيرة جداً عن موضع الاتزان و عاد إلى موضعه الأصلي ، نقول : إنّ النظام في حالة اتزان مستقر(Stable Equilibrium) وخلاف ذلك نقول إنّه متزن اتزانا غير مستقر (Unstable Equilibrium) . فعلى سبيل المثال : البندول البسيط الساكن ، يعتبر متزن اتزانا مستقرا ، بينما إذا وضعت بيضة بشكل طولي بحيث ترتكز على نهايتيها ، تكون في حالة اتزان غير مستقر. و من هذه الأمثلة ، يتضح أنّه إذا كانت طاقة الوضع أقل ما يمكن ، يكون النظام في

حالة اتزان مستقر ، و بتعبير رياضي : إذا كانت المشتقة الثانية لدالّة طاقة الوضع عند نقطة الاتزان أكبر من صفر ، يكون الاتزان مستقرا ، أمّا إذا كانت المشتقة الثانية أقل من صفر يكون الاتزان غير مستقر . أي أنّ :

$$V = V(q) \tag{5.3}$$

و إذا كانت

$$F = -\left.\frac{dV}{dq}\right|_0 = 0 \tag{5.4}$$

فيكون النظام متزناً عند نقطة الأصل ، و إذا كانت المشتقة الثانية عند النقطة 0 أكبر من صفر

$$\left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_0 > 0 \tag{5.5}$$

فتكون طاقة الوضع V_0 أقل ما يمكن ، و الاتزان في هذه الحالة اتزانا مستقراً .
أمّا إذا كانت

$$\left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_0 < 0 \tag{5.6}$$

فهذا يعني أنّ V_0 أكبر ما يمكن ، و الاتزان غير مستقر .

مثال (5.1)

يتحرك جسيم كتلته m في مجال قوة ، طاقة وضعها ممثّلة بالعلاقة التالية :

$$V(x) = (1-\alpha x)\, e^{-\alpha x} \qquad , x \geq 0$$

حيث α ثابت قيمته موجبة ، جد مايلي :

أ) نقاط الاتزان ، ب) طبيعة نقاط الاتزان ؟ .

الحل :

بأخذ المشتقة الأولى لطاقة الوضع $V(x)$ و مساواتها بالصفر نجد أنّ :

$$\frac{dV(x)}{dx} = -\alpha\, e^{-\alpha x} + (1-\alpha x)(-\alpha)\, e^{-\alpha x} = 0$$

و منها فإنّ :

$$-\alpha\, e^{-\alpha x} - \alpha\, e^{-\alpha x} + \alpha^2 x\, e^{-\alpha x} = 0$$

أي أنّ :

$$\left(-2\alpha + \alpha^2 x\right) e^{-\alpha x} = 0$$

إذن :

$$2\alpha = \alpha^2 x \Rightarrow x = \frac{2}{\alpha}$$

يوجد نقطة اتزان عندما $x = \frac{2}{\alpha}$.

و بأخذ المشتقة الثانية لطاقة الوضع $V(x)$ نجد أنّ :

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = 2\alpha^2 e^{-\alpha x} + \alpha^2 e^{-\alpha x} - \alpha^3 x e^{-\alpha x}$$

$$= \left(2\alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^3 x\right) e^{-\alpha x}$$

و بتعويض قيمة x نحصل على :

$$\left.\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right|_{x=\frac{2}{\alpha}} = \left\{2\alpha^2 + \alpha^2 e^{-\alpha x} - \alpha^3\left(\frac{2}{\alpha}\right)\right\} e^{-\alpha\frac{2}{\alpha}}$$

$$= \alpha^2 e^{-2}$$

و حيث إنّ قيمة $\alpha^2 e^{-2}$ أكبر من الصفر ؛ فإنّ الاتزان مستقر .

5.2* الاهتزازات الصغيرة حول نقطة الاتزان (Small Oscillations)

سوف نهتم في هذا الفصل بدراسة حركة النظام بالقرب من نقطة الاتزان المستقر ، بحيث تكون الإزاحة عن هذه النقطة صغيرة . و في هذه الحالة نستطيع نشر دالة طاقة الوضع حول نقطة الاتزان باستخدام متسلسلة تيلر(Taylor Series) . و على اعتبار أنّ النظام محافظ ، و يحتوي على n من درجات الحرية ، بحيث أنّ مجموعة الإحداثيات المعمّمة هي : $(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)$ ؛ فإنّ طاقة الوضع تعطى بالدالّة التالية :

$$V(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)$$

التي يمكن نشرها حول نقطة الاتزان المحددّة بالإحداثيات : $(q_{10}, q_{20}, q_{30}, \ldots, q_{n0})$ كما يلي :

$$V(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n) = V(q_{10}, q_{20}, q_{30}, \ldots, q_{n0}) + \frac{1}{1!}\sum_{l=1}^{n}\left.\left(\frac{\partial V}{\partial q_l}\right)\right|_{q_l = q_{l0}} (q_l - q_{l0})$$

$$+ \frac{1}{2!}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left.\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_l\,\partial q_m}\right)\right|_{q_l = q_{l0},\, q_m = q_{m0}} (q_l - q_{l0})(q_m - q_{m0}) + \ldots \qquad (5.7)$$

الحد الأول في الطرف الأيمن مقدار ثابت . و بما أنّ تحديد نقطة الصفر لطاقة الوضع اختياري ، نستطيع اعتبار هذا الحد صفرا بدون أن يحصل أي تأثير على معادلات الحركة . القوى المعمّمة Q_l ، يجب أن تساوي صفرا ؛ لأنّ النظام في حالة اتزان ، أي أنّ :

$$Q_l = -\frac{\partial V}{\partial q_l} = 0 \qquad l = 1, 2, \ldots, n \qquad (5.8)$$

و بإهمال الرتب العالية ، يبقى عندنا الحد الثالث في الطرف الأيمن ، الذي يحتوي على الرتبة الثانية ؛ لذلك نكتب طاقة الوضع كما يلي :

$$V(q_1, q_2, \ldots q_n) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_l\, \partial q_m}\right)\Bigg|_{q_l = q_{l0},\, q_m = q_{m0}} (q_l - q_{l0})(q_m - q_{m0}) \quad (5.9)$$

و إذا عرّفنا الإحداثيات المعمّمة التالية :

$$\eta_l \equiv (q_l - q_{l0})\ ,\ \eta_m \equiv (q_m - q_{m0})$$

نستطيع كتابة طاقة الوضع بدلالة هذه الإحداثيات كما يلي :

$$V = V(\eta_l) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} V_{lm}\, \eta_l \eta_m \quad (5.10)$$

حيث :

$$V_{lm} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_l\, \partial q_m}\right)\Bigg|_{q_l = q_{l0},\, q_m = q_{m0}} = \text{ثابت}$$

الثابت V_{lm} ، يمثل مصفوفة متناظرة (Symmetric Matrix) .

الشكل العام لطاقة الحركة

$$T = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} M_{lm}\, \dot{q}_l \dot{q}_m$$

حيث M_{lm} ، دالة تعطى بدلالة الإحداثيات q_i ، و يمكن نشرها كما يلي :

$$M_{lm} = M_{lm}(q_{10}\ , q_{20}\ , \ldots, q_{n0}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial M_{lm}}{\partial q_k}\Bigg|_0 q_k + \ldots \quad (5.11)$$

و أقل قيمة لطاقة الحركة T يمكن الحصول عليها بإهمال جميع الحدود في الطرف الأيمن ، عدا الحد الأول الذي يمثل كمية ثابتة سوف نرمز له بالرمز T_{lm} ، و أيضا يمثل مصفوفة متناظرة . و بما أنّ :

$$\dot{\eta}_l = \dot{q}_l$$

فنستطيع كتابة طاقة الحركة كما يلي :

$$T = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} T_{lm}\, \dot{\eta}_l \dot{\eta}_m \quad (5.12)$$

حيث :

$$T_{lm} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\eta}_l \partial \dot{\eta}_m}$$

و الآن بعد الحصول على تعبير لطاقة الوضع و طاقة الحركة في حالة الاهتزازات الصغيرة ، نكون في صدى كتابة دالة لاجرانج كما يلي :

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(T_{lm}\, \dot{\eta}_l \dot{\eta}_m - V_{lm}\eta_l\eta_m\right) \quad (5.13)$$

لذلك تكون معادلات لاجرانج :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$$

التي تأخذ الشكل التالي :

$$\sum_{m=1}^{n}\left(T_{lm}\ddot{\eta}_m + V_{lm}\eta_m\right) = 0 \qquad l = 1, 2, \ldots, n \tag{5.14}$$

المعادلة (5.14) تمثل n معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية ، و حسب طرق حل المعادلات التفاضلية نتوقع الحل أن يكون على الصورة التالية :

$$\eta_m = A_m \cos(\omega t + \Phi_m) \tag{5.15}$$

و بتعويض هذا الحل في المعادلة (5.14) نحصل على :

$$\sum_{m=1}^{n} V_{lm} A_m \cos(\omega t + \Phi_m) - T_{lm}\ \omega^2 A_m \cos(\omega t + \Phi_m) = 0 \tag{5.16}$$

لكل قيمة من قيم ω يجب أن تكون جميع Φ_m متساوية . أي أنّ: $\Phi_m = \Phi$ ، و بما أنّ قيم $\cos(\omega t + \Phi_m)$ لا تساوي صفراً لجميع قيم t ، إذن :

$$\sum_{m=1}^{n}(V_{lm} - T_{lm}\,\omega^2) A_m = 0 \qquad , l = 1, 2, \ldots, n \tag{5.17}$$

هذه المعادلة ، يمكن أن تكتب بشكلٍ صريح كما يلي :

$$(V_{11} - T_{11}\ \omega^2) A_1 + (V_{12} - T_{12}\ \omega^2) A_2 + \ldots + (V_{1n} - T_{1n}\ \omega^2) A_n = 0$$

$$(V_{n1} - T_{n1}\,\omega^2) A_1 + (V_{n2} - T_{n2}\,\omega^2) A_2 + \ldots + (V_{nn} - T_{nn}\ \omega^2) A_n = 0 \tag{5.18}$$

وحتى نحصل على حلول غير صفرية لِ (A_m) ، يجب أن تكون محدّدة معاملات A_m مساوية للصفر . أي أنّ :

$$\begin{vmatrix} (V_{11} - T_{11}\omega^2) & (V_{12} - T_{12}\omega^2) & . & (V_{1n} - T_{1n}\,\omega^2) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ (V_{n1} - T_{n1}\omega^2) & (V_{n2} - T_{n2}\omega^2) & . & (V_{nn} - T_{nn}\,\omega^2) \end{vmatrix} = 0 \tag{5.19}$$

و بحساب هذه المحدّدة نحصل على معادلة كثيرة الحدود من الدرجة n إلى ω^2 (Equations of an n- degree polynomial) كل جذر من جذور هذه المعادلة يمثل تردد مختلف . لهذا يمكن كتابة الحل العام كما يلي :

$$\eta_l = \sum_{k=1}^{n} f_k A_{lk} \cos(\omega_k t + \Phi_k) \tag{5.20}$$

حيث أنّ ω_k هي جذور لمعادلة كثيرة الحدود ، و A_{kl} و Φ_kوf_k ، ثوابت يمكن

تحديدها باستخدام الشروط الابتدائية . إذا كانت قيمة ω^2 سالبة أو صفر ، فلا يكون هناك حركة اهتزازية . أمّا إذا كانت قيمة ω^2 موجبة ، فسوف يكون اهتزازات حول نقطة الاتزان ، أي :

إذا كانت $\omega_k^2 > 0$: فإنّ : $\eta_k = A_k \exp(i\omega_k t) + B_k \exp(-i\omega_k t)$

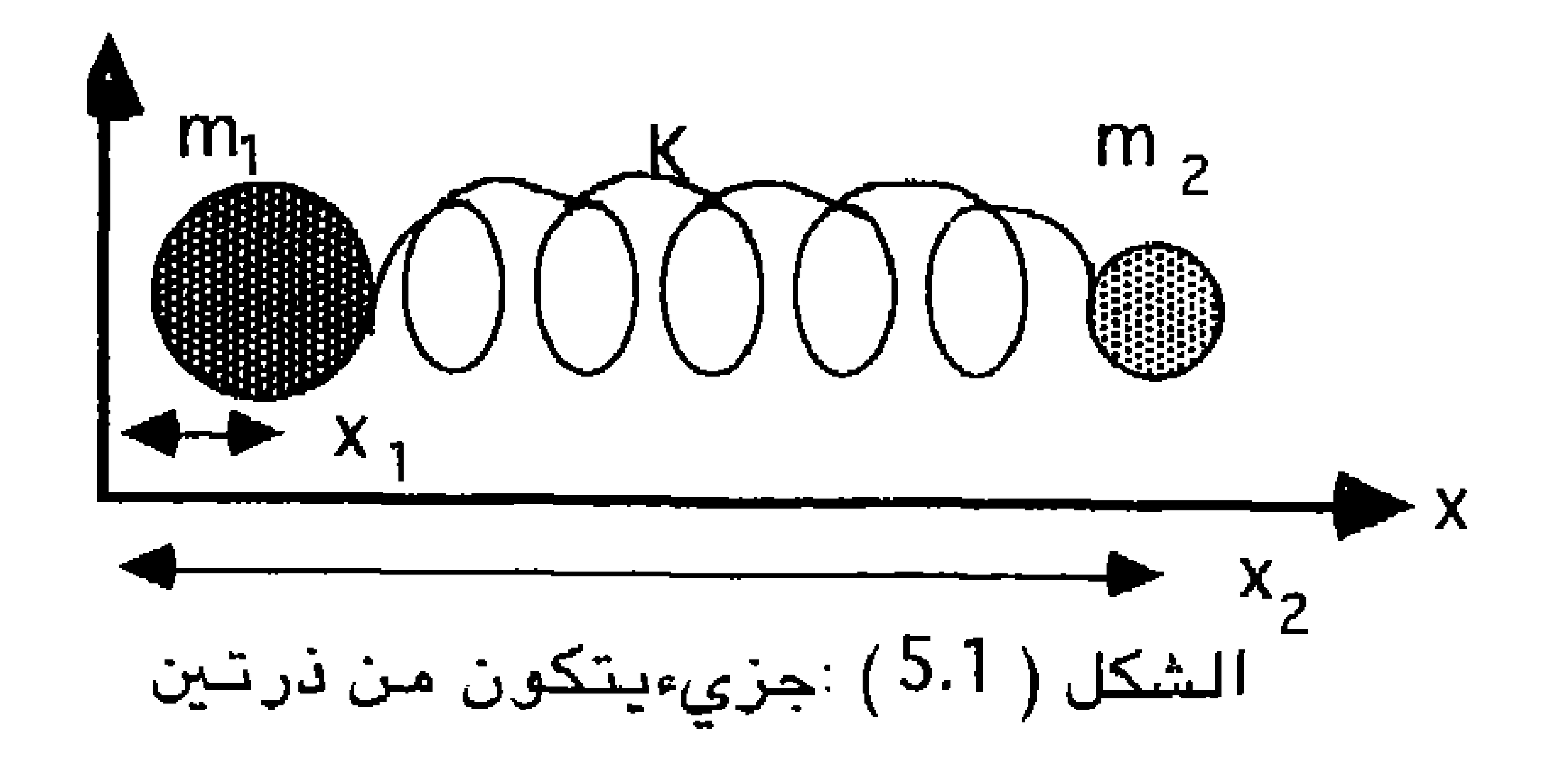
و إذا كانت $\omega_k^2 = 0$: فإنّ : $\eta_k = C_k t + D_k$

و إذا كانت : $\omega_k^2 < 0$ فإنّ : $\eta_k = E_k \exp(\omega_k t) + F_k \exp(-\omega_k t)$

و بتعويض قيم ω_k في المعادلة (4.18) ن، ستطيع تحديد قيم السعة A_{kl} بدلالة A_{kl} ؛ حيث أنه يوجد n قيمة لِ (ω_k^2) و يوجد n ثابت (A_{kl}) $(k = 1 , 2 . . . , n)$.

مثال (5.2)

جزيء يتكون من ذرتين كما في الشكل (5.1) ، جد الترددات الطبيعية لهذا النظام ، إذا أُعتبر أنّه يكافيء كتلتين (m_1 و m_2) مربوطتين بواسطة زنبرك عديم الكتلة ثابت مرونته k ؟ .



الشكل (5.1) :جزيءيتكون من ذرتين

الحل

معتمدا على الشكل (5.1) ، فإنّ طاقة الحركة و طاقة الوضع لهذا النظام تعطى على الترتيب بالمعادلتين التاليتين :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$$

ومنها نحصل على دالة لاجرانج :

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$$

باستخدام معادلات لاجرانج نحصل على معادلات الحركة :

$$m_1 \ddot{x}_1 + k x_1 - k x_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k x_2 - k x_1 = 0$$

فيكون شكل الحلول المتوقعه :

$$x_1 = A \cos \omega t \quad و \quad x_2 = B \cos \omega t$$

نعوض هذه الحلول في معادلات الحركة لنحصل على المعادلات التالية :

$$- m_1\omega^2 A \cos \omega t + k A \cos \omega t - k B \cos \omega t = 0$$
$$- m_2\omega^2 B \cos \omega t + k B \cos \omega t - k A \cos \omega t = 0$$

و بحذف $\cos \omega t$ من المعادلتين السابقتين نحصل على :

$$\left(- m_1\omega^2 + k\right) A - k B = 0$$
$$- k A + \left(- m_2\omega^2 + k\right) B = 0$$

الآن محددة معاملات A و B يجب أن تساوي صفراً .

$$\begin{vmatrix} \left(- m_1\omega^2 + k\right) & - k \\ - k & \left(- m_2\omega^2 + k\right) \end{vmatrix} = 0$$

إذن :

$$\left(- m_1\omega^2 + k\right)\left(- m_2\omega^2 + k\right) - k^2 = 0$$
$$m_1 m_2\omega^4 - m_1 k \omega^2 - m_2 k \omega^2 - k^2 + k^2 = 0$$
$$\omega^2\left\{ m_1 m_2 \omega^2 - k\left(m_1 + m_2\right)\right\} = 0$$

فنجد :

$$\omega_1^2 = 0$$
$$\omega_2^2 = \frac{k\left(m_1 + m_2\right)}{m_1 m_2}$$

5.3* تعامد المتجهات المميزة
(The Eigenvectors of The Orthogonality)

إنّ المتجهات المميزة A_m في المعادلات (5.18) ، تشكل مجموعة تعامد قياسي (Orthonormal set) ، وباستخدام المعادلة (5.17) ، نحصل على :

$$\sum_{m=1}^{n} V_{lm} A_{mk} = \omega_k^2 \sum_m T_{lm} A_{mk} \qquad (5.21)$$

نكتب هذه المعادلة بدلالة التردّد ω_j ، و ذلك باستبدال k ب j ، و l ب m ، و m ب l .

$$\sum_{l=1}^{n} V_{lm} A_{lj} = \omega_j^2 \sum_l T_{lm} A_{lj} \qquad (5.22)$$

V_{lm} و T_{lm} مصفوفتان متناظرتان لذلك :

$$T_{lm} = T_{ml}$$

و :

$$V_{lm} = V_{ml}$$

بضرب المعادلة (5.21) في A_{lj} ، و الجمع فوق l ، و ضرب المعادلة (5.22) في A_{mk} ، و الجمع فوق m ، نحصل على المعادلتين التاليتين :

$$\sum_{m,l} V_{lm} A_{mk} A_{lj} = \omega_k^2 \sum_{l,m} T_{lm} A_{mk} A_{lj} \tag{5.23}$$

$$\sum_{m,l} V_{lm} A_{lj} A_{mk} = \omega_j^2 \sum_{l,m} T_{lm} A_{lj} A_{mk} \tag{5.24}$$

بطرح المعادلة (5.24) من المعادلة (5.23) ، نحصل على :

$$0 = \left(\omega_k^2 - \omega_j^2\right) \sum_{l,m} T_{lm} A_{mk} A_{lj}$$

إذا كانت $k \neq j$ ، فإنّ $\left(\omega_k^2 - \omega_j^2\right) \neq 0$ ، و هذا يعني : أنّ المجموع يساوي الصفر ، أي أنّ :

$$\sum_{l,m} T_{lm} A_{lj} A_{mk} = 0 \quad \text{في حالة } k \neq j \tag{5.25}$$

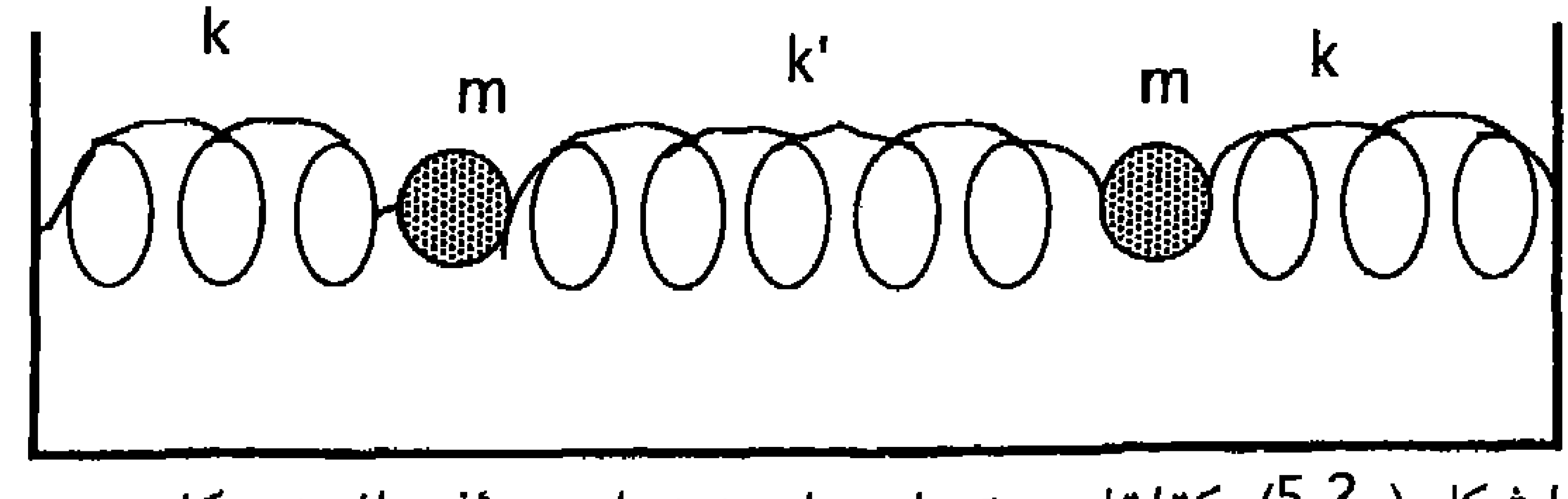
و في هذه الحالة نقول أنّ المتّجهات المميزة A_m في المعادلات (5.18) ، تشكل مجموعة تعامد (Orthogonal set) . أمّا إذا كانت $k = j$ ، يكون المجموع $\sum_{l,m} T_{lm} A_{mk} A_{lj}$ غير محدّد ، و يجب أن يكون أكبر من الصفر ، حتى يكون للنظام طاقة حركة ، لذلك نختار المتجهات المميزة A_m بحيث تشكل مجموعات قياسية (Normalized set) أي أنّ :

$$\sum_{m,l} T_{lm} A_{mk} A_{lk} = 1 \tag{5.26}$$

و إذا تحقق الشرطان (5.25) و (5.26) نقول : إنّ المتجهات المميزة A_m تشكل مجموعة تعامد قياسي (Orthonormal set) . و سوف نستخدم الشرط (5.26) في تحديد المتجهات المميزة (Eigen Vectors) .

مثال (5.3)

كتلتان متساويتان مربوطتان بواسطة زنبركين ثابت مرونة كل منهما k . إذا ربطت الكتلتان مع بعضهما بواسطة زنبرك ثالث ثابت مرونته 'k ، وكانت حركة الكتلتين محصورة على نفس الخط الذي يربطهما كما في الشكل (5.2) ، جد المتجهات المميزة و الترددات المميزة و الحلول العامة ؟ .



الشكل (5.2): كتلتان متساويتان تهتزان بتأثير الزنبركات

الحل :

طاقة الحركة ، و طاقة الوضع ، و لاجرانج للنظام في الشكل (5.2) علي الترتيب :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$
$$V = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} k' (x_1 - x_2)^2$$
$$L = T - V = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{1}{2} k (x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2} k' (x_1 - x_2)^2$$

ولكن :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m \dot{x}_1 , \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m \dot{x}_2$$

إذن معادلات الحركة :

$$m \ddot{x}_1 + \left(k + k'\right) x_1 - k' x_2 = 0$$
$$m \ddot{x}_2 + \left(k + k'\right) x_2 - k' x_1 = 0$$

حسب المعادلة (5.15) نفترض الحلول التالية :

$$x_1 = A_1 \cos \omega t \ , \ x_2 = A_2 \cos \omega t$$

نعوض هذه الحلول في معادلات الحركة فنحصل على :

$$- m \omega^2 A_1 \cos \omega t + \left(k + k'\right) A_1 \cos \omega t - k' A_2 \cos \omega t = 0$$
$$- m \omega^2 A_2 \cos \omega t + \left(k + k'\right) A_2 \cos \omega t - k' A_1 \cos \omega t = 0$$

بحذف $\cos \omega t$ من المعادلتين السابقتين :

$$\left\{- m \omega^2 + \left(k + k'\right)\right\} A_1 - k' A_2 = 0 \qquad (5.27a)$$
$$\left\{- m \omega^2 + \left(k + k'\right)\right\} A_2 - k' A_1 = 0 \qquad (5.27b)$$

و حتى نحصل على حلول ليست بديهية لكل من A_1 و A_2 ، يجب أن تكون محددة معاملات A_1 و A_2 مساوية للصفر ، أي :

$$\begin{vmatrix} - m \omega^2 + k + k' & - k' \\ - k' & - m \omega^2 + k + k' \end{vmatrix} = 0$$

و بحساب قيمة المحددة نجد :

$$\left(- m\omega^2 + k + k'\right)^2 - k'^2 = 0$$

و بنقل k'^2 إلى الطرف الأيمن ، و أخذ الجذر التربيعي للطرفين نحصل على :

$$\left(- m\omega^2 + k + k'\right) = \pm k'$$

و هذا يعني أنه يوجد قيمتان للتردد ω

$$- m \omega_1 = + k' - k - k'$$

القيمة الأولى :

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}$$

و نحصل على القيمة الثانية بأخذ إشارة السالب كما يلي :

$$- m \omega_2^2 = - k' - k - k' = - 2 k' - k$$

فتكون القيمة الثانية :

$$\omega_2^2 = \frac{2\,k' + k}{m}$$

ω_1 و ω_2 هي الترددات المميزة .

لإيجاد المتجهات المميزة نعوض قيم ω_1^2 و ω_2^2 في المعادلات (5.27) التي يمكن إعادة صياغتها بالنسبة للتردد الأول كما يلي :

$$\left(-m\,\omega_1^2 + k + k'\right) A_{11} \;\; - k'A_{21} = 0$$

$$\left(-m\,\omega_1^2 + k + k'\right) A_{21} \;\; - k'A_{11} = 0$$

و بتعويض قيمة ω_1^2 نحصل على :

$$A_{11} \; = A_{21} = A$$

أيضاً بالنسبة للتردد الثاني :

$$\left(-m\,\omega_2^2 + k + k'\right) A_{12} \;\; - k'A_{22} = 0$$

$$\left(-m\,\omega_2^2 + k + k'\right) A_{22} \;\; - k'A_{12} = 0$$

و بتعويض قيمة ω_2^2 نحصل على :

$$A_{12} \; = -A_{22} = B$$

إذن المتجهات المميزة هي :

$$\begin{pmatrix} B \\ -B \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$$

و يمكن تحديد قيم A و B باستخدام شرط التقييس Normalized condition (5.26) حيث $k = 1$ أو $k = 2$. حسب الترددات في حالة التردد الأول ω_1 ، فإنّ $k = 1$. إذن :

$$T_{11}\,A_{11}\,A_{11} \;+\; T_{12}\,A_{21}\,A_{11} + T_{21}\,A_{11}\,A_{21} + T_{22}\,A_{21}\,A_{21} \;= 1$$

علماً بإنّ المصفوفة T_{lm} تحدد كما يلي :

$$T_{lm} \;= \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_l \partial \dot{x}_m} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$$

إذن :

$$m\,A^2 + m\,A^2 = 1 \;\Rightarrow\; \quad A = \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

أيضا $k = 2$ عندما يكون التردد ω_2 و شرط التقييس (Normalized condition) يكتب كما يلي :

$$T_{11}\,A_{12}\,A_{12} \;+\; T_{12}\,A_{12}\,A_{22} + T_{21}\,A_{22}\,A_{12} + T_{22}\,A_{22}\,A_{22} \;= 1$$

$$m\,B^2 + m\,B^2 = 1 \;\Rightarrow\; \quad B = \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

لذلك تكتب المتجهات المميزة (Eigen Vectors) كما يلي :

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \quad و \quad \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

ب) باستخدام العلاقة (5.20) نجد الحل العام كما يلي :

$$x_1 = f_1 A_{11} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + f_2 A_{12} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

$$x_1 = \frac{f_1}{\sqrt{2m}} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + \frac{f_2}{\sqrt{2m}} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

$$x_2 = f_1 A_{21} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + f_2 A_{22} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

$$x_2 = \frac{f_1}{\sqrt{2m}} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) - \frac{f_2}{\sqrt{2m}} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

5.4* استخدام المصفوفات لدراسة الاهتزازات الصغيرة

مسائل الاهتزازات الصغيرة التي ناقشناها ، من الممكن أن تعالج باستخدام المصفوفات ، إذا اعتبرنا نظاما يتكون من n درجة حريّة و يحتوي على الاهتزازات الصغيرة حول نقطة الاتزان ، فإنّ معادلات لاجرانج لهذا النظام هي :

$$\sum_{m=1}^{n} \left(V_{lm} A_m - \omega^2 T_{lm} A_m\right) = 0 \qquad l = 1, 2, \ldots, n \qquad (5.28)$$

حيث :

$$V_{lm} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_l \, \partial q_m}\right)_{q_l = q_{l0},\, q_m = q_{m0}} = V_{ml} \qquad (5.29)$$

$$T_{lm} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_l \, \partial \dot{q}_m}\right)_{q_l = q_{l0},\, q_m = q_{m0}} = T_{ml} \qquad (5.30)$$

المعادلة (5.28) تكافىء المعادلات التالية :

$$\left(V_{11} - \omega^2 T_{11}\right) A_1 + \left(V_{12} - \omega^2 T_{12}\right) A_2 + \ldots + \left(V_{1n} - \omega^2 T_{1n}\right) A_n = 0 \qquad (5.31)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\left(V_{n1} - \omega^2 T_{n1}\right) A_1 + \left(V_{n2} - \omega^2 T_{n2}\right) A_2 + \ldots + \left(V_{nn} - \omega^2 T_{nn}\right) A_n = 0 \qquad (5.31)$$

الكميات V_{lm} عبارة عن عناصر المصفوفة المتناظرة V التي تكتب كما يلي :

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ V_{n1} & V_{n2} & \cdots & V_{nn} \end{bmatrix} \qquad (5.32)$$

والكميات T_{lm} عبارة عن عناصر المصفوفة المتناظرة T التي تكتب كما يلي :

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \cdots & T_{nn} \end{bmatrix} \tag{5.33}$$

إذن معادلات لاجرانج تكتب باستخدام المصفوفات :

$$\left(V - \omega^2 T\right) a = 0 \tag{5.34}$$

حيث أنّ a ، مصفوفة تتكون من عمود واحد :

$$a = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \tag{5.35}$$

لكل تردد ω_k يوجد متجه مميز مصاحب a_k ، لذلك يوجد عندنا n متجه مميز مصاحب لِ (n) قيمة مميزة (Eigen Values) ω_k . هذه المتجهات المميزة تُكوِّن مصفوفة مربعة نسميها A ، حيث أنّ أعمدتها هي المتجهات المميزة a_k أي أنّ :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{5.36}$$

لذلك نعيد كتابة المعادلة (5.35) كما يلي :

$$a_k = \begin{bmatrix} A_{1k} \\ A_{2k} \\ \vdots \\ A_{nk} \end{bmatrix} \tag{5.37}$$

5.5* الإحداثيات الطبيعية (Normal Coordinates)

من الجدير بالذكر هنا ، أن نشير إلى الإحداثيات الطبيعية (Normal Coordinates) . لاحظنا مما سبق أنّ الحلّ العام للإحداثي q_l ، يحتوي على جميع الترددات ، أي أنّ :

$$q_l = \sum_{k=1}^{n} f_k A_{lk} \cos\left(\omega_k t + \Phi_k\right)$$

حيث f_k ثابت معياري يحدد من الشروط الابتدائية المصاحبة لثابت الطور Φ_k . الآن نعرف الكمية Q_k التي تحتوي على تردد واحد ω_k :

$$Q_k = f_k \cos\left(\omega_k t + \Phi_k\right) \tag{5.38}$$

حيث :

$$q_l = \sum_k A_{lk} Q_k \tag{5.39}$$

Q_k ، هي الكميات التي تهتز بتردد واحد ، و من الممكن أن نعتبرها إحداثيات جديدة نسميها الإحداثيات الطبيعية ، حيث أنها تحقق المعادلة التالية :

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k = 0 \tag{5.40}$$

إذن : الإحداثيات الطبيعية ، هي الإحداثيات التي تهتز بتردّد واحد ، و تحقق المعادلة (5.40) . و معادلات الحركة تكتب باستخدام الإحداثيات الطبيعية ، و كل معادلة تكون مستقلةعن المعادلات الأخرى ، و نستطيع إثبات المعادلة (5.40) بسهولة . من المعادلة (5.39) نلاحظ أنّ :

$$\dot{q}_l = \sum_k A_{lk} \dot{Q}_k$$

لذلك تكتب طاقة الحركة كما يلي :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{l,m} T_{lm} \dot{q}_l \dot{q}_m \tag{5.41}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{l,m} T_{lm} \left(\sum_k A_{lk} \dot{Q}_k \right) \left(\sum_s A_{ms} \dot{Q}_s \right)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,s} \left(\sum_{l,m} T_{lm} A_{lk} A_{ms} \right) \dot{Q}_k \dot{Q}_s$$

و باستخدام شرط التعامد القياسي (Orthonormality Condition) نعرف أنّ :

$$\sum_{l,m} T_{lm} A_{lk} A_{ms} = \delta_{ks}$$

حيث δ_{ks} كرونيكر دلتا .

إذن :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,s} \delta_{ks} \dot{Q}_k \dot{Q}_s = \frac{1}{2} \sum_k \dot{Q}_k^2 \tag{5.42}$$

أيضاً طاقة الوضع تكتب كما يلي :

$$V = \frac{1}{2} \sum_{l,m} V_{lm} q_l q_m \tag{5.43}$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k,s} \left(\sum_{l,m} V_{lm} A_{lk} A_{ms} Q_k Q_s \right) \tag{5.44}$$

من المعادلة (5.23) نعرف أنّ :

$$\sum_{l,m} V_{lm} A_{lk} A_{ms} = \omega_k^2 \sum_{l,m} T_{lm} A_{lk} A_{ms} = \omega_k^2 \delta_{ks}$$

و بالتعويض في المعادلة (5.44) نحصل على طاقة الوضع بالشكل التالي :

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k,s} \omega_k^2 \delta_{ks} Q_k Q_s = \frac{1}{2} \sum_k \omega_k^2 Q_k^2 \tag{5.45}$$

الآن نستطيع كتابة دالة لاجرانج ، باستخدام دالة طاقة الحركة (5.42) ، و دالة طاقة الوضع (5.45) كما يلي :

$$L = \frac{1}{2}\sum_k(\dot{Q}_k^2 - \omega_k^2\ Q_k^2) \qquad (5.46)$$

و معادلات لاجرانج بالنسبة للإحداثيات الطبيعية Q_k هي :

$$\frac{\partial L}{\partial Q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} = 0$$

ومنها :

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k = 0 \qquad (5.47)$$

و هذه هي المعادلة (5.40) . إذا استطعنا التعبير عن توزيع النظام باستخدام الإحداثيات الطبيعية فإنّ المصفوفتين V_{lm} و T_{lm} تصبحان مصفوفتين قطريتين (Diagonal matrices) ، علما بأنّ المصفوفة القطرية ، هي مصفوفة مربعة ، عناصر قطرها لا تساوي صفرا ، بينما بقية عناصرها أصفار ، مثل :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

يتضح مما سبق أنّه من السهل الانتقال من الإحداثيات العادية q_l إلى الإحداثيات الطبيعية Q_l و ذلك باستخدام المصفوفة A المعطاة بالعلاقة (5.36)

$$q = A\,Q \qquad (5.48)$$

و هذه المعادلة تكتب بالتفصيل على الصيغة التالية :

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} \qquad (5.49)$$

و بعبارة أخرى :

$$Q = A^{-1}\,q \qquad (5.50)$$

حيث ترمز A^{-1} لمعكوس المصفوفة A أي أنّ :

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I \qquad (5.51)$$

هنا I هي مصفوفة الوحدة (Identity Matrix)

$$A\,I = I\,A = A \qquad (5.52)$$

مصفوفة الوحدة ، هي حالة خاصة من المصفوفة القطرية و تحصل عندما تكون العناصر القطرية مساوية واحد

$$a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$$

مثال (5.4)

جد الإحداثيات الطبيعية للنظام الموصوف في المثال (5.3) ؟ .

الحل

المصفوفة A تعطى كالآتي :

$$A = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

هذه المصفوفة ، هي مصفوفة متعامدة (Orthogonal Matrix)

أي أنّ :

$$A^{-1} = A^{T}$$

حيث A^T ترمز للمصفوفة المبدلة للمصفوفة A (Transpose Matrix) ، والمصفوفة المبدلة ، هي المصفوفة الناتجة من تبديل صفوف المصفوفة بأعمدتها . أي الناتجة من جعل صفوف المصفوفة أعمدة لها . الآن نحسب A^T على النحو الآتي :

$$A^{T} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

و باستخدام العبارة (5.50) نجد أنّ :

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

إذن :

$$Q_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}\, x_1 + \sqrt{\frac{m}{2}}\, x_2$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{m}{2}}\, x_1 - \sqrt{\frac{m}{2}}\, x_2$$

و بتعويض قيم x_2 و x_1 نحصل على :

$$Q_1 = \frac{f_1}{2} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + \frac{f_2}{2} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

$$+ \frac{f_1}{2} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) - \frac{f_2}{2} \cos(\omega_2 t + \Phi_2) = f_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_1)$$

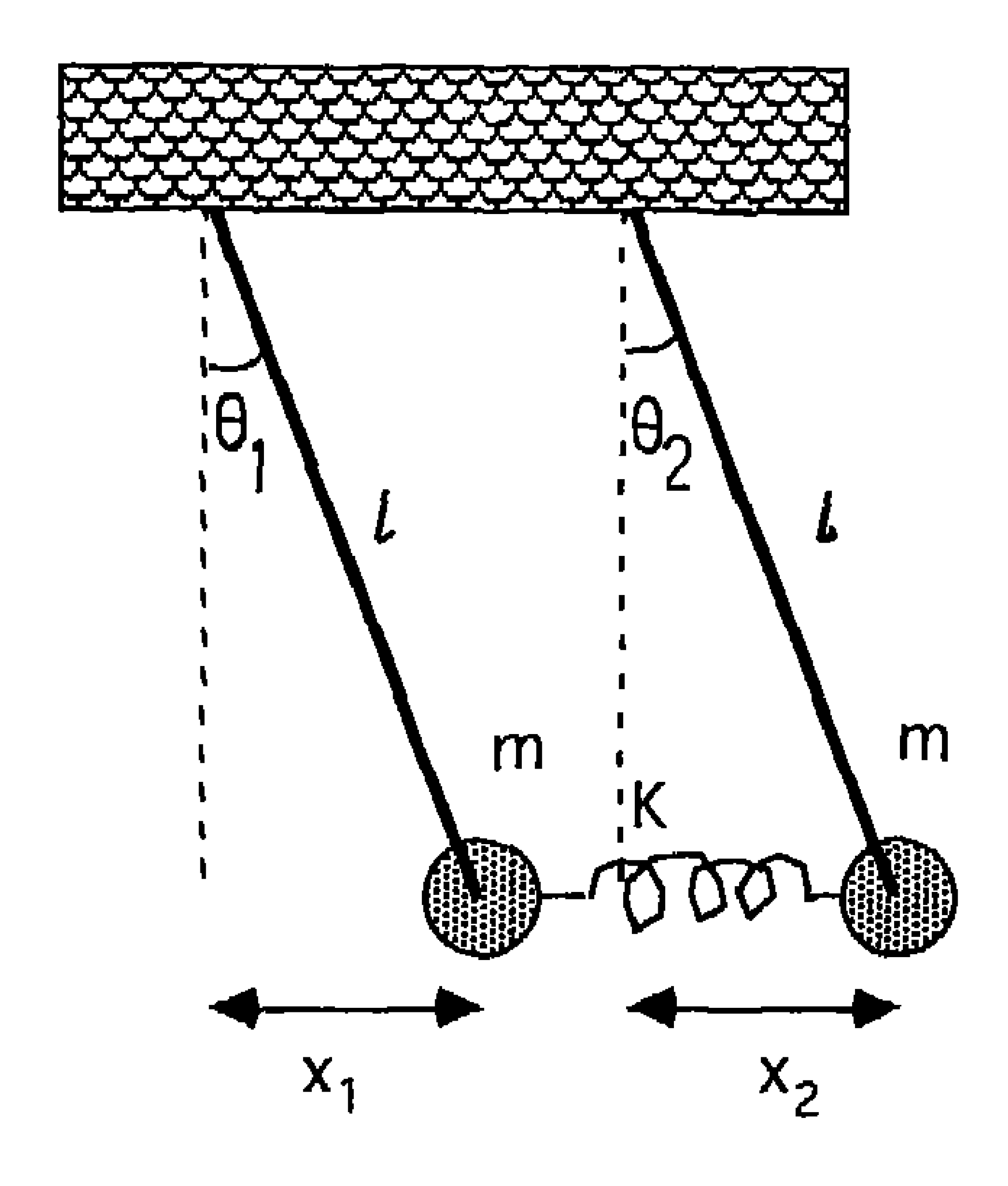
$$Q_2 = \frac{f_1}{2} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + \frac{f_2}{2} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

$$-\frac{f_1}{2}\cos(\omega_1 t + \Phi_1) + \frac{f_2}{2}\cos(\omega_2 t + \Phi_2) = f_2\cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

نلاحظ أنّ الإحداثيات الطبيعية تحتوي على تردد واحد .

مثال (5.5)

بندولان لهما نفس الطول ℓ و نفس الكتلة m ، مربوطان بواسطة زنبرك ثابت مرونته k كما في الشكل (5.3) . 1) حدّد عناصر المصفوفة T و المصفوفة V ، 2) جد الترددات الطبيعية ، 3) جد المتجهات المميزة ، 4) حدّد الإحداثيات الطبيعية ، 5) جد الحلول العامة ؟ .



الشكل (5.3) : بندولان مربوطان بزنبرك

الحل :

1) طاقة الحركة لهذا النظام :

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right)$$

إذن :

$$T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1^2} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_1} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

و طاقة الوضع :

$$V = mg\ell\left(1-\cos\theta_1\right) + mg\ell\left(1-\cos\theta_2\right) + \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2$$

نحن نعرف أنّ الدّوال $\cos\theta_1$ و $\cos\theta_2$ يمكن نشرهما كما يلي :

$$\cos\theta_1 = 1 - \frac{\theta_1^2}{2} + \ldots$$

$$\cos\theta_2 = 1 - \frac{\theta_2^2}{2} + \ldots$$

و بما أنّ θ_1 و θ_2 صغيرتان ، نهمل الحدود العليا في المتسلسلتين فنكتب طاقة الوضع كما يلي :

$$V = mg\ell\frac{\theta_1^2}{2} + mg\ell\frac{\theta_2^2}{2} + \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2$$

لكن :

$$\theta_2 = \frac{x_2}{\ell} \text{ و } \theta_1 = \frac{x_1}{\ell}$$

إذن :

$$V = \frac{1}{2}\frac{mg}{\ell}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \frac{1}{2}k\left(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2\right)$$

و بإعادة ترتيب هذه المعادلة نكتب طاقة الوضع على الصورة :

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{\ell} + k\right)x_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{\ell} + k\right)x_2^2 - k x_1 x_2$$

إذن المصفوفة V تحسب كما يلي :

$$V = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{mg}{\ell} + k & -k \\ -k & \dfrac{mg}{\ell} + k \end{bmatrix}$$

2 – نحسب التّرددات الطبيعية باستخدام العلاقة (5.19)

$$\left|V - \omega^2 T\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{mg}{\ell} + k - m\omega^2 & -k \\ -k & \dfrac{mg}{\ell} + k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

و بحساب قيمة المحددة نجد :

$$\left(\frac{mg}{\ell} + k - m\omega^2\right)^2 - k^2 = 0$$

بنقل k^2 إلى الطرف الأيمن و أخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة ، نحصل على :

$$\left(\frac{mg}{\ell} + k - m\omega^2\right) = \pm k$$

بنقل $\frac{mg}{\ell} + k$ إلى الطرف الأيمن وضرب طرفي المعادلة بإشارة ناقص . ينتج :

$$m\omega^2 = \frac{mg}{\ell} + k \pm k$$

إذن التردد الأول يحسب بأخذ إشارة السالب :

$$m\,\omega_1^2 = \frac{mg}{\ell} \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{g}{\ell}$$

و التردد الثاني يحسب بأخذ إشارة الموجب :

$$m\,\omega_2^2 = \frac{mg}{\ell} + k + k \Rightarrow \omega_2^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}$$

3 ـ باستخدام العلاقة (5.34) نجد :

$$\begin{bmatrix} \frac{mg}{\ell} + k - m\omega_1^2 & -k \\ -k & \frac{mg}{\ell} + k - m\omega_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} = 0$$

نعوض قيمة ω_1 فنحصل على :

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} = 0$$

$$k\,A_{11} - k\,A_{21} = 0 \Rightarrow A_{11} = A_{21} = B$$

إذن المتجه المميز المصاحب لِ (ω_1) هو :

$$\begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}$$

و نستطيع تحديد قيمة B باستخدام شرط التقييس (5.26) فنحصل على :

$$m\,B^2 + m\,B^2 = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

أيضاً :

$$\begin{bmatrix} \frac{mg}{\ell} + k - m\omega_2^2 & -k \\ -k & \frac{mg}{\ell} + k - m\omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = 0$$

و بتعويض قيمة ω_2 :

$$\begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = 0$$

$$-kA_{12} - kA_{22} = 0$$
$$A_{12} = -A_{22} = C$$

فيكون المتجه المميز المصاحب لِ (ω_2) هو :

$$\begin{bmatrix} C \\ -C \end{bmatrix}$$

و باستخدام شرط التقييس :

$$mC^2 + mC^2 = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

4 - الإحداثيات الطبيعية هي :

$$Q_1 = f_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_1) \text{ و } Q_2 = f_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

5 - المصفوفة المربعة A هي :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & C \\ B & -C \end{bmatrix}$$

أي أنّ :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{-1}{\sqrt{2m}} \end{bmatrix}$$

و نحن نعرف أنّ :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{-1}{\sqrt{2m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

إذن :

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} Q_1 + \frac{1}{\sqrt{2m}} Q_2$$
$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} Q_1 - \frac{1}{\sqrt{2m}} Q_2$$

و بتعويض قيم Q_1 و Q_2 في المعادلتين السابقتين نجد أنّ :

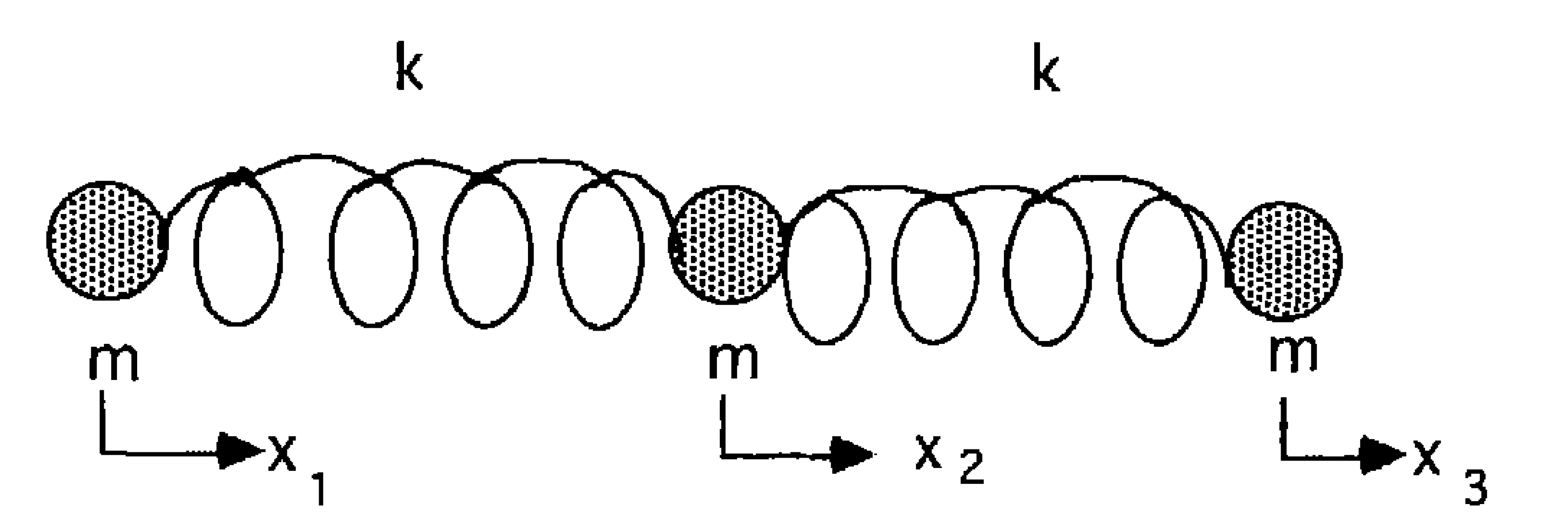
$$x_1 = \frac{f_1}{\sqrt{2m}} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + \frac{f_2}{\sqrt{2m}} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$
$$x_2 = \frac{f_1}{\sqrt{2m}} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) - \frac{f_2}{\sqrt{2m}} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

5.6* اهتزازات الجزيئات

من التطبيقات الفيزيائية على الاهتزازات الصغيرة : اهتزازات الجزيئات التي تتكون من ذرتين أو ثلاث ذرات . الجزيئات ثنائية الذرة يمكن أن تعتبر مكافئة لذرتين لهما كتل مقدارها على الترتيب : m_1 و m_2 ، مربوطتين بواسطة زنبرك عديم الكتلة ثابت مرونته k . تهتز الذرتان على الخط الواصل بينهما في أبسط الحالات . أمّا الجزيء ثلاثي الذرة يتكون من ذرتين متماثلتين ، كتلة كل واحدة منهما m ، موضوعتين على كل جانب من جوانب ذرة كتلتها M ، و تكون الذرات الثلاث على خط مستقيم ، و من الممكن أن نعتبر الاهتزازات التي تحدث على هذا الخط فقط في أبسط الحالات .

مثال (5.6)

جزيء يتكون من ثلاث ذرات متماثلة تهتز على خط مستقيم ، كما في الشكل (5.4) . 1) جد طاقة الوضع و طاقة الحركة لهذا النظام 2) إحسب المصفوفتين T و V ، 3) جد الترددات الطبيعية ، 4) جد المتجهات المميزة ، 5) ما الإحداثيات الطبيعية ، 6) جد الحلول العامّة ؟ .



الشكل (5.4) : جزيء يتكون من ثلاث ذرات متماثلة

الحل :

الإحداثيات المعمّمة هي : x_1 و x_2 و x_3

1) طاقة الوضع :

$$V = \frac{1}{2} k \left(x_2 - x_1\right)^2 + \frac{1}{2} k \left(x_3 - x_2\right)^2$$

طاقة الحركة :

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right)$$

2) المصفوفة T تحسب كالآتي :

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_3} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_3} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_3 \partial \dot{x}_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_3 \partial \dot{x}_2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

و المصفوفة V هي :

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

3) الترددات الطبيعية نحصل عليها من العلاقة (5.19)

$$\left|V - \omega^2 T\right| = \begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

و بحساب قيمة هذه المحددة نحصل على :

$$\left(k - m\omega^2\right)\left\{\left(2k - m\omega^2\right)\left(k - m\omega^2\right) - k^2\right\} - k^2\left(k - m\omega^2\right) = 0$$

و بعبارة أخرى :

$$\left(k - m\omega^2\right)\left(2k^2 - 2km\omega^2 - km\omega^2 + m^2\omega^4 - k^2 - k^2\right) = 0$$

و منها فإنّ :

$$\omega^2\left(k - m\omega^2\right)\left(m^2\omega^2 - 3km\right) = 0$$

إذن :

$$\omega_1 = 0\,,\; k - m\omega_2^2 = 0 \Rightarrow \omega_2^2 = k/m$$

$$m^2\omega_3^2 - 3km = 0 \Rightarrow \omega_3^2 = 3k/m$$

4) المتجهات المميزة تحسب باستخدام العلاقة (5.34) كما يلي :

$$\begin{bmatrix} k - m\omega_k^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega_k^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega_k^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{1k} \\ A_{2k} \\ A_{3k} \end{bmatrix} = 0$$

بالنسبة لِ (ω_1) نعوض قيمتها فنحصل على :

$$\begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} = 0$$

أي أنّ :

$$k A_{11} - k A_{21} = 0$$
$$A_{11} = A_{21} = B$$
$$- k A_{21} + k A_{31} = 0$$
$$A_{21} = A_{31} = B$$

إذن المتجه المميز الأول هو :

$$\begin{bmatrix} B \\ B \\ B \end{bmatrix}$$

و باستخدام شرط التقييس نحصل على :

$$mB^2 + mB^2 + mB^2 = 1 \quad \Rightarrow B = \frac{1.}{\sqrt{3m}}$$

و إذا عوضنا قيمة ω_2 نحصل على :

$$\begin{bmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & k & -k \\ 0 & -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{bmatrix} = 0$$

و هذا يؤدي إلى :

$$-k A_{22} = 0 \quad \Rightarrow A_{22} = 0$$

$$- kA_{12} - kA_{32} = 0 \quad \Rightarrow A_{12} = -A_{32} = C$$

إذن المتجه المميز الثاني :

$$\begin{bmatrix} C \\ 0 \\ - C \end{bmatrix}$$

و باستخدام شرط التقييس نحصل على :

$$mC^2 + mC^2 = 1 \quad \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

و بتعويض قيمة ω_3 نحصل على :

$$\begin{bmatrix} - 2k & -k & 0 \\ -k & - k & -k \\ 0 & -k & - 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{bmatrix} = 0$$

و هذه المعادلة تؤدي إلى المعادلات التالية :

$$- 2k A_{13} - kA_{23} = 0$$

$$A_{13} = - \frac{1}{2} A_{23} = D$$

$$- k A_{23} - 2k A_{33} = 0$$

$$- \frac{1}{2} A_{23} = A_{33} = D$$

إذن المتجه المميز الثالث هو :

$$\begin{bmatrix} D \\ -2D \\ D \end{bmatrix}$$

أيضاً باستخدام شرط التقييس :

$$mD^2 + 4\,mD^2 + mD^2 = 1 \quad \Rightarrow D = \frac{1}{\sqrt{6m}}$$

لذلك المصفوفة المربّعة A هي :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{6m}} \\ \frac{1}{\sqrt{3m}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6m}} \\ \frac{1}{\sqrt{3m}} & \frac{-1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{6m}} \end{bmatrix}$$

5) الإحداثيات الطبيعية هي :

$$Q_1 = f_1 \cos \Phi_1$$

$$Q_2 = f_2 \cos\left(\omega_2 t + \Phi_2\right)$$

$$Q_3 = f_3 \cos\left(\omega_3 t + \Phi_3\right)$$

6) نجد الحلول العامة باستخدام العلاقة (4.40)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{6m}} \\ \frac{1}{\sqrt{3m}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6m}} \\ \frac{1}{\sqrt{3m}} & \frac{-1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{6m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}$$

و بإيجاد حاصل ضرب المصفوفتين على الطرف الأيمن نجد :

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3m}} f_1 \cos \Phi_1 + \frac{1}{\sqrt{2m}} f_2 \cos\left(\omega_2 t + \Phi_2\right) + \frac{1}{\sqrt{6m}} f_3 \cos\left(\omega_3 t + \Phi_3\right)$$

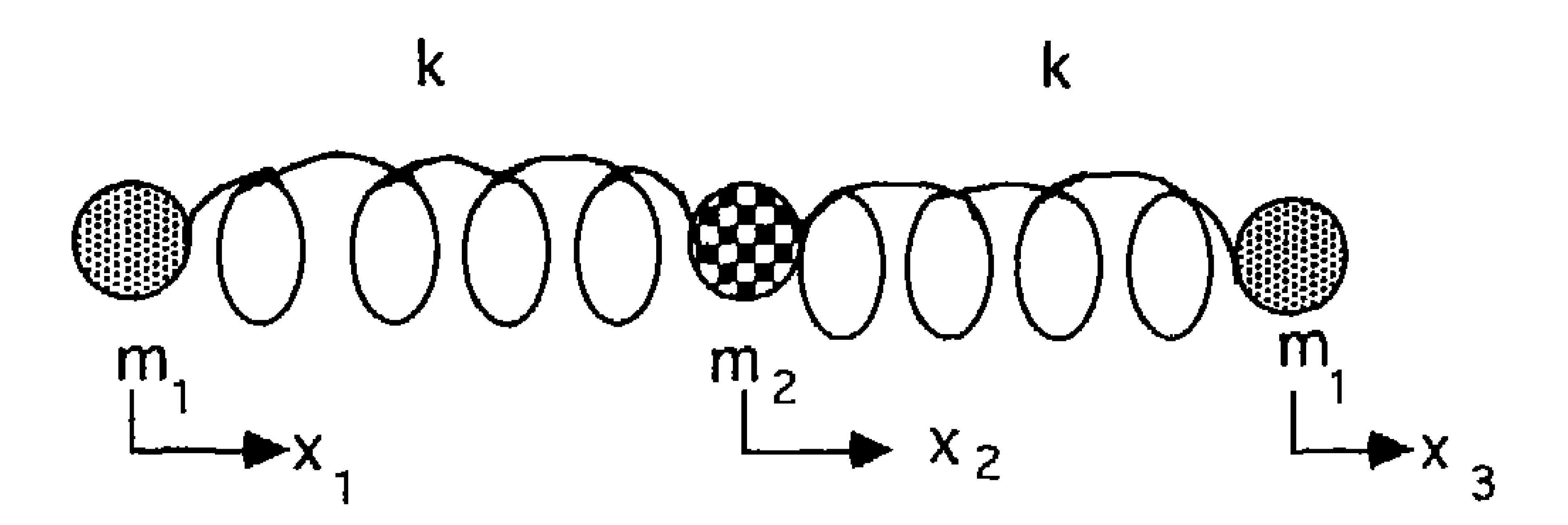
$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3m}} f_1 \cos \Phi_1 - \frac{2}{\sqrt{6m}} f_3 \cos\left(\omega_3 t + \Phi_3\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3m}} f_1 \cos \Phi_1 - \frac{1}{\sqrt{2m}} f_2 \cos\left(\omega_2 t + \Phi_2\right) + \frac{1}{\sqrt{6m}} f_3 \cos\left(\omega_3 t + \Phi_3\right)$$

* * *

أسئلة عامة وحلول جزئية

1) جد معادلات الحركة لكل ذرة في جزيء ثاني أكسيد الكربون الموضح في الشكل (5.5) على اعتبار أنها تهتز على خط مستقيم ، ثم جد الترددات الطبيعية المحتملة لحالات الحركة ؟ .



الشكل (5.5) : جزيء ثاني أكسيد الكربون

الحل الجزئي :

معادلات الحركة :

$$m_1 \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_3) = 0$$

$$m_1 \ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2) = 0$$

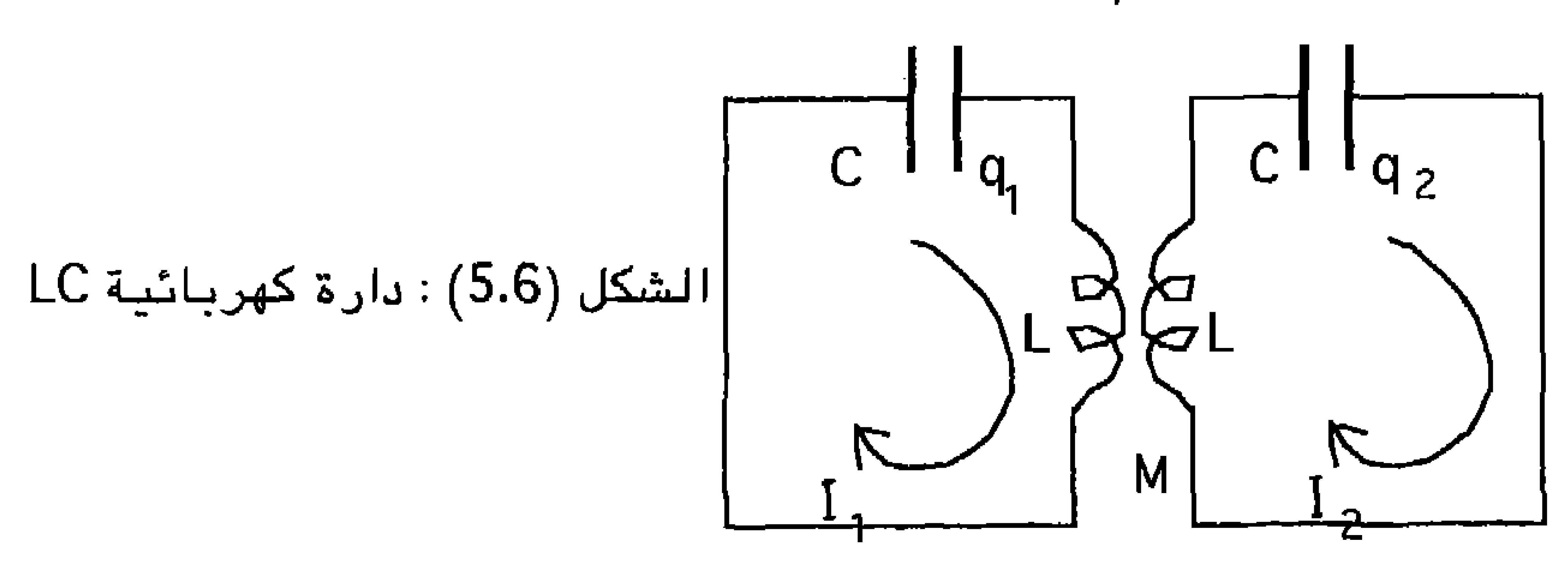
الترددات الطبيعية :

$$\omega_1^2 = 0$$

$$\omega_2^2 = k\frac{m_2 + 2m_1}{m_2 m_1}$$

$$\omega_3^2 = \frac{k}{m_1}$$

2 - يمثل الشكل (5.6) دارة كهربائية (LC) هزّازة غير متخامدة ، إذا وضعت بالقرب من دارة كهربائية مماثلة ، سوف تولد الهزات بواسطة التأثير الحثي المتبادل بين الملفين (مقدار المحاثة المتبادلة M) ، أكتب معادلات كيرشوف للدارات الكهربائية ، ثم جد الترددات الطبيعية ؟ .



الشكل (5.6) : دارة كهربائية LC

الحل الجزئي :

معادلات كيرشوف :

$$L\ddot{I}_1+\frac{q_1}{c}+M\ddot{I}_2=0$$

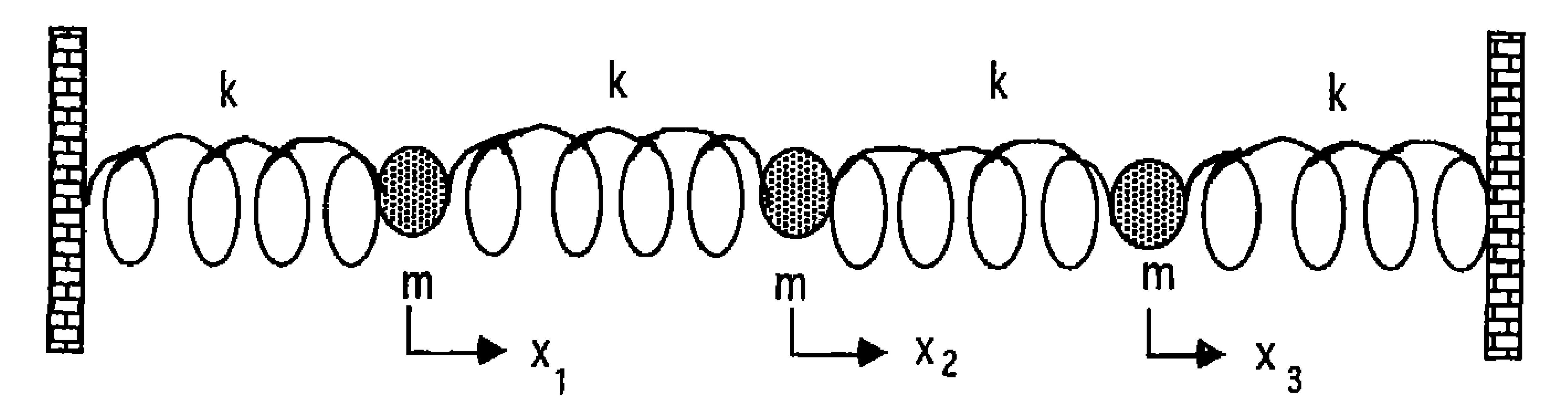
$$L\ddot{I}_2+\frac{q_2}{c}+M\ddot{I}_1=0$$

الترددات الطبيعية :

$$\omega_1=\frac{1}{\sqrt{Lc+Mc}}$$

$$\omega_2=\frac{1}{\sqrt{Lc-Mc}}$$

3 - ثلاث كتل متماثلة مربوطة بواسطة زنبرك كما في الشكل (5.7) ، إذا أزيح النظام عن موضع الاتزان ، احسب الترددات الطبيعية و الإحداثيات الطبيعية ، حيث k ثابت الزنبرك ؟.



الشكل (5.7) : ثلاث كتل متماثلة مربوطة بزنبركات متشابهة

الحل الجزئي :

طاقة الحركة و طاقة الوضع على الترتيب :

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2\right)$$

$$V=\frac{1}{2}k\left\{x_1^2+\left(x_2-x_1\right)^2+\left(x_3-x_2\right)^2+x_3^2\right\}$$

الترددات الطبيعية :

$$\omega_3^2=\left(2+\sqrt{2}\right)\frac{k}{m}\ ,\ \omega_2^2=\left(2-\sqrt{2}\right)\frac{k}{m}\ ,\ \omega_1^2=\frac{2k}{m}$$

الإحداثيات الطبيعية :

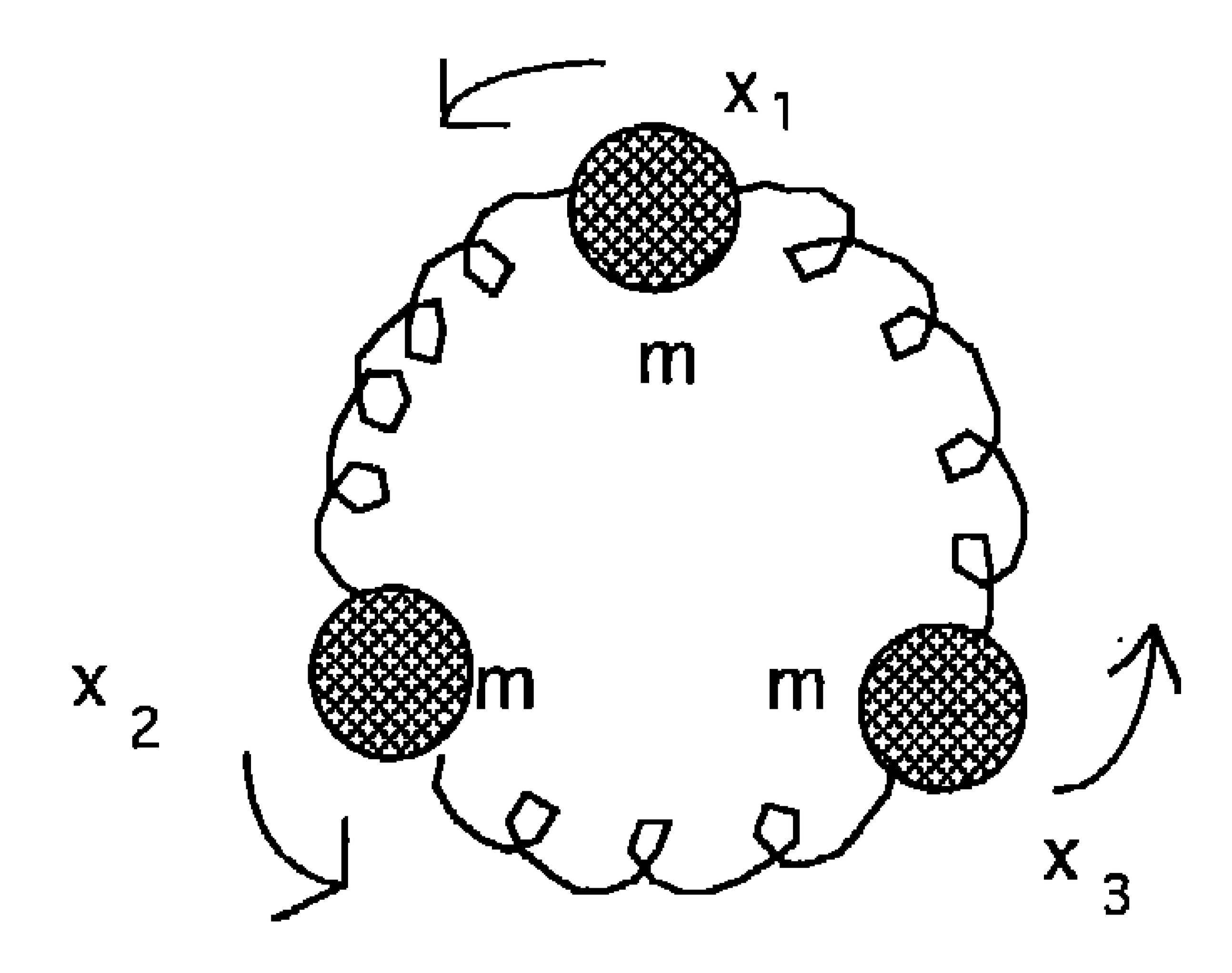
$$Q_1=f_1\cos\left(\omega_1 t+\delta_1\right)$$

$$Q_2=f_2\cos\left(\omega_2 t+\delta_2\right)$$

$$Q_3=f_3\cos\left(\omega_3 t+\delta_3\right)$$

4- مستخدما النظام المبين في الشكل (5.8) الذي يمثل اهتزازات صغيرة لثلاث كتل متماثلة حول موضع الإتزان على دائرة مثبتة . جد :

1-المصفوفة T و المصفوفة V ، 2 - الترددات الطبيعية ، 3 - الإحداثيات الطبيعية ، 4 -المتجهات المميزة و الحلول العامة ؟ .



الشكل (5.8) :ثلاثة أجسام مرتبطة بزنبركات

الحل الجزئي :

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 \right)$$

$$V = \frac{1}{2} k \left\{ x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + x_3^2 \right\}$$

-1

$$T = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix}$$

-2

$$\omega_3^2 = \left(2 + \sqrt{2}\right)\frac{k}{m} \ , \ \omega_2^2 = \left(2 - \sqrt{2}\right)\frac{k}{m} \ , \ \omega_1^2 = \frac{2k}{m}$$

3- المتجهات المميزة هي أعمدة المصفوفة A حيث :

$$A = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

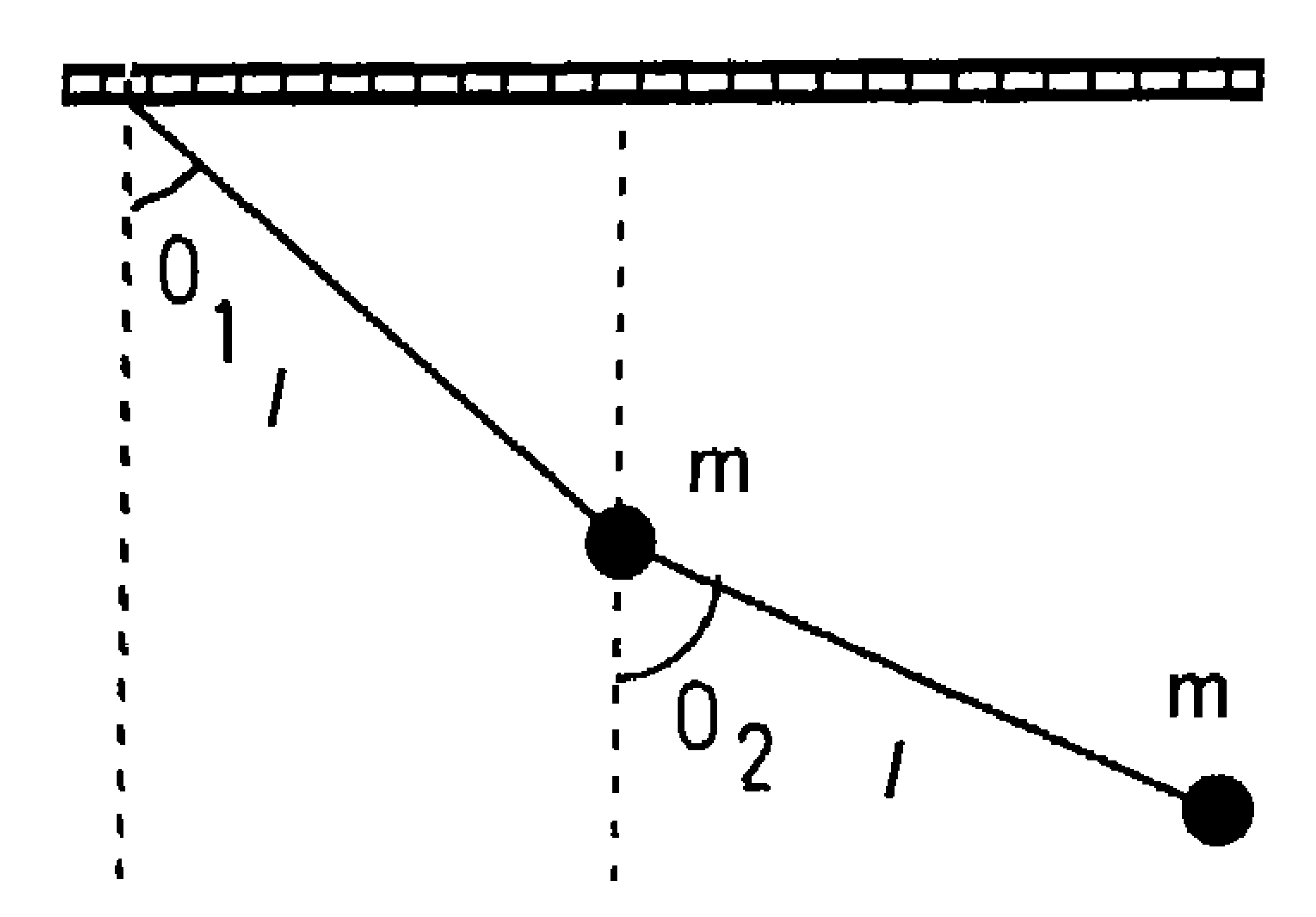
4- الإحداثيات الطبيعية هي :

$$Q_1 = f_1 \cos\left(\omega_1 t + \Phi_1\right)$$
$$Q_2 = f_2 \cos\left(\omega_2 t + \Phi_2\right)$$
$$Q_3 = f_3 \cos\left(\omega_3 t + \Phi_3\right)$$

الحلول العامة :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$$

5- بندولان مزدوجان كما في الشكل (5.9) ، جد المصفوفة V و المصفوفة T و الترددين الطبيعيين للاهتزازات الصغيرة حول نقاط الاتزان ؟ .



الشكل (5.9) : بندولان مزدوجان

الحل الجزئي :

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m \left\{ l^2 \dot{\theta}_1^2 + l^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right\}$$

$$V = -mgl \cos\theta_1 - mgl (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

نقاط الاتزان :

$$\theta_1 = \theta_2 = 0$$

$$T = \begin{bmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix}$$

$$\omega_1^2 = (2 - \sqrt{2}) \frac{g}{l} \ , \quad \omega_2^2 = (2 + \sqrt{2}) \frac{g}{l}$$

*****

الفصل السادس

الانتقالات الفيصلية (القانونية)
Canonical Transformations

6.1 *المقدمة

لقد عرفنا في الفصل الثالث ، أنّ المعادلات الفيصلية للحركة تعطى بالعلاقات التالية :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \;,\; \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad , i = 1 , 2 , \ldots , n \qquad (6.1)$$

نستخدم هذه المعادلات لحل العديد من المسائل الميكانيكية . و سهولة حل هذه المسائل يتوقف على اختيار الإحداثيات المعمّمة التي نستخدمها ؛ لذلك سنتطرق لدراسة الانتقالات (التحويلات) الفيصلية من مجموعة ما لإحداثيات الموقع و كمية الحركة لمجموعة أخرى ، علماً بأنّ معادلات هاميلتون للحركة لا تمكّننا من حل جميع المسائل الميكانيكية ؛ لذلك لابدّ من البحث عن طرق أخرى لحل هذه المسائل . من هذه الطرق : طريقة الانتقالات الفيصلية ، حيث أنّنا ننتقل من نظام محدّد بإحداثيات الموقع q_i و كمية التحرك p_i ، إلى نظام محدّد بإحداثيات جديدة Q_i و كمية تحرك جديدة P_i ، و نسمّي هذا الانتقال بالانتقال الفيصلي ، إذا كانت الإحداثيات Q_i و كمية التحرك P_i تحقق معادلات الحركة الفيصلية ، أي أنّ :

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H(Q, P)}{\partial P_i} \;,\; \dot{P}_i = -\frac{\partial H(Q, P)}{\partial Q_i} \qquad , i = 1 , 2 , \ldots , n \qquad (6.2)$$

حيث (H) هي دالة هاميلتون في الإحداثيات الجديدة ، و على سبيل المثال : إذا كانت q_i و p_i ترمزان للإحداثيات القديمة للموضع و كمية الحركة ، بينما Q_i و P_i ، الإحداثيات الجديدة للموضع و كميةالحركة ، فإنّ التحويل يكون :

$$P_i = P_i\,(p_1 , \ldots , p_n \;, q_1 , \ldots , q_n , t) \qquad (6.3a)$$

$$Q_i = Q_i\,(p_1 , \ldots , p_n \;, q_1 , \ldots , q_n , t) \qquad (6.3b)$$

للاختصار سنكتب المعادلات (6.3) كما يلي :

$$P_i = P_i\,(p_j, q_j , t) \,,\quad Q_i = Q_i\,(p_j, q_j , t) \qquad (6.4)$$

6.2 * أقواس بويسون وخصائصها
(Poisson Brackets and their Properties)

عند دراسة الانتقالات الفيصلية ، لابدّ من التطرق لكمية تسمى أقواس

بويسون (Poisson Brackets) التي سنعرّفها كما يلي : إذا عرّفنا دالتين f و g بدلالة الإحداثيات المعمّمة و الزخم الخطي q_i و p_i ، فإنّ قوس بويسون يعطى بالعلاقة التالية :

$$\{f , g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \tag{6.4}$$

المشتقة الزمنية الكلية للدالة F حيث $F = F(q_i , p_i ,t)$ تكتب كما يلي :

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{6.6}$$

و باستخدام المعادلات الفيصلية (6.1) نعيد كتابة المعادلة السابقة كالتالي :

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{6.7}$$

وباستخدام تعريف قوس بويسون (6.5) نحصل على :

$$\frac{dF}{dt} = \{F , H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{6.8}$$

و إذا عوضنا بدل F الإحداثيات المعمّمة q_i أو الزخم الخطي p_i نحصل على معادلات الحركة الفيصلية كما يلي :

$$\dot{q}_i = \{q_i , H\} \tag{6.9}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i , H\} \tag{6.10}$$

و بذلك نكون قد كتبنا معادلات هاميلتون للحركة باستخدام أقواس بويسون ، أي أنّ المشتقة الزمنية للإحداثيات ، هي عبارة عن قوس بويسون للإحداثيات و دالة هاميلتون ، و المشتقة الزمنية للزخم المعمّم عبارة عن قوس بويسون للزخم و دالة هاميلتون .

تحقق أقواس بويسون بعض الخصائص الرياضية المهمّة وهي :

1) عدم التماثل (Antisymmetry)

$$\{f , g\} = - \{g , f\}$$

و يمكن إثبات هذه الخاصية من التعريف مباشرة .

2) الخطية (Linearity)

$$\{c_1 f + c_2 g , h\} = c_1 \{f , h\} + c_2 \{g , h\}$$

حيث h دالة بدلالة الإحداثيات المعمّمة و الزخم المعمّم .

3) الضرب (Product rule)

أي أنّ :

$$\{f , g h\} = \{f , g\} h + \{f , h\} g$$

4) مُحدِّدة جاكوبي (Jacobi's identity)

$$\{f , \{g , h\}\} + \{g , \{h , f\}\} + \{h , \{f , g\}\} = 0$$

من السهل إثبات هذه الخصائص باستخدام التعريف (6.5) مباشرة . دعنا الآن

نحسب الأقواس الأساسية (Fundamental brackets)

$$\{q_i , q_j\} = \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial q_j}{\partial q_k} \right) = 0$$

و بنفس الطريقة يمكن إثبات :

$$\{p_i , p_j\} = 0 , \{q_i , p_j\} = \delta_{ij}$$

مثال (6.1)

جد أقواس بويسون للدالتين التاليتين :

$$f = q_1^2 + q_2 p_1 , \quad g = q_2^2 + p_1^2$$

الحل

باستخدام تعريف قوس بويسون (6.5) نجد أنّ :

$$\{f , g\} = \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial g}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial g}{\partial q_1} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial g}{\partial p_2} - \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial g}{\partial q_2} \right)$$

$$= (2 q_1)(2 p_1) - (q_2)(0) + (p_1)(0) - (0)(2 q_2) = 4 q_1 p_1$$

مثال (6.2)

مستخدما الأقواس الأساسية وخواص أقواس بويسون احسب الأقواس التالية :

1) $\{q^2, p\}$

2) $\{q + p , q + p\}$

3) $\{qp, q^2\}$

الحل

1) $\{q^2, p\} = q \{q, p\} + \{q, p\} q = 2q$

2) $\{q + p , q + p\} = \{q , q + p\} + \{p , q + p\}$

$= \{q , q\} + \{q , p\} + \{p , q\} + \{p , p\} = 0 + 1 - 1 + 0 = 0$

3) $\{qp, q^2\} = q \{p, q^2\} + \{q, q^2\} p$

$= q \{p, q\} q + q^2 \{p, q\} + 0$

$= - q^2 - q^2 = -2 q^2$

مثال (6.3)

جد معادلات الحركة للهزاز التوافقي البسيط باستخدام أقواس بويسون ؟ .

الحل

قيمة دالة هاميلتون للهزاز التوافقي :

$$H = \frac{p^2}{2 m} + \frac{1}{2} k q^2$$

معادلات الحركة هي :

$$\dot{q} = \{q, H\}$$

و بتعويض قيمة H نجد أنّ :

$$\dot{q} = \left\{q, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2 \right\}$$

و باستخدام خصائص أقواس بويسون نحصل على :

$$= \frac{1}{2m} \{q, p^2\} + \frac{1}{2} k \{q, q^2\}$$

$$= \frac{1}{2m} 2p \{q, p\} = \frac{p}{m}$$

أيضا :

$$\dot{p} = \{p, H\} = \left\{p, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} k \{p, q^2\} = k q \{p, q\} = - k q$$

6.3* الانتقالات الفيصلية (Canonical Transformation)

لقد عرّفنا الانتقالات الفيصلية فيما سبق وعرَفنا من المعادلات (6.3) أنّ هذه الانتقالات تعطى بالعلاقتين التاليتين :

$$P_i = P_i (q, p, t), \quad Q_i = Q_i (q, p, t) \tag{6.11}$$

هذه الإحداثيات الجديدة ، يجب أن تحقق المعادلات الفيصلية مثل الإحداثيات القديمة q_i و p_i ، أي أنّ :

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = - \frac{\partial K}{\partial Q_i} \tag{6.12}$$

الكمية K التي تظهر في هذه المعادلات ، هي عبارة عن دالة هاميلتون الجديدة ، وهي عبارة عن دالة هاميلتون ، و لكنّها معطاة بدلالة الإحداثيات الجديدة و الزخم Q و P . نحن نعرف من الفصل الرابع أنّ معادلات الحركة تحدّد باستخدام مبدأ هاميلتون للتغاير أي أنّ :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = 0 \tag{6.13}$$

و باستخدام تعريف دالة هاميلتون التالية :

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

نحصل على :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right] dt = 0 \tag{6.14}$$

و بنفس الطريقة نستطيع كتابة المعادلة (6.14) باستخدام الإحداثيات الفيصلية الجديدة Q و P كما يلي :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) \right] dt = 0 \qquad (6.15)$$

و بطرح المعادلة (6.15) من المعادلة (6.14) نحصل على :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H - \sum_i P_i \dot{Q}_i + K \right] dt = 0 \qquad (6.16)$$

و هذا يعني أنّ ما بداخل القوسين ، هو عبارة عن المشتقة الزمنية الكلية لدالة محدّدة F ، وهذه الدّالة تسمى : الدّالة المولدة للإنتقال ، و بعبارة أخرى :

$$\left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H - \sum_i P_i \dot{Q}_i + K \right] \equiv \frac{dF}{dt} \qquad (6.17)$$

من الواضح أنّ F ، هي دالة ، بدلالة الإحداثيات القديمة و الجديدة بالإضافة للزمن . إنّ الانتقال ، هو انتقال فيصلي ، إذا كان التفاضل الكلي للدّالة المولدة تفاضلا تاماً . أي أنّ dF تفاضل تام :

$$\sum_i p_i \, dq_i - \sum_i P_i \, dQ_i = dF$$

و

$$K = H$$

مثال (6.4)

إثبت أنّ الانتقال $Q = p$ و $P = -q$ هو انتقال فيصلي ، حيث $K = H$.

الحل :

$$dF = p\,dq - P\,dQ = p\,dq + q\,dp = d(qp)$$

إذن dF تفاضل تام ، لأنّ :

$$F = qp + \text{ثابت}$$

وهذا يعني أنّ الانتقال فيصلي .

6.4* الدّوال المولّدة للانتقالات الفيصلية
(Generating Functions For Canonical Transformation)

الدّالة المولّدة : هي دالة تُعطى بدلالة 4n من الإحداثيات (الإحداثيات القديمة والإحداثيات الجديدة) بالإضافة للزمن ، و باستخدام العلاقة (6.11) يقلص عدد الإحداثيات إلى 2n بدلاً من 4n ، و ذلك لأنّه ليس من المناسب خلط المتغيرات في نظرية الانتقالات ، فإذا اخترنا أحد الإحداثيات القديمة لتكون موجودة في الدّالة المولّدة ، فيجب أن نختار جميع هذه الإحداثيات ، ونفس الحكم بالنسبة للإحداثيات الجديدة ؛ لذلك يوجد أربعة أنواع من الدّوال المولّدة للإقترانات الفيصلية و هي :

$$F_1(q, Q, t), F_2(q, P, t), F_3(p, Q, t), F_4(p, P, t)$$

كل نوع من هذه المولِّدات سوف يحقق معادلات معينة ، بحيث إن هذه المعادلات تؤدي إلى انتقالات فيصلية ، علماً بأنَّ الدَّالة المولِّدة ليست وحيدة ، أي أنّه من الممكن أنّ يكون للانتقال الفيصلي أكثر من دالّة مولّدة . وفيما يلي سوف نشتق معادلات الدّوال المولِّدة باستخدام المعادلة (6.17) فنحصل على معادلة الدَّالة المولِّدة كما يلي :

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H - \sum_i \dot{Q}_i P_i + K = \frac{dF_1}{dt} \qquad (6.18)$$

لكن $F_1 = F_1(q, Q, t)$ لذلك

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} \qquad (6.19)$$

بمساوات معاملات $\dot{Q}_i$ و $\dot{q}_i$ في المعادلتين نحصل على :

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad K - H = \frac{\partial F_1}{\partial t} \qquad (6.20)$$

بحل المعادلة الأولى ، نحصل على Q_i بدلالة p_i و q_i و t ، و بالتعويض في المعادلة الثانية نحصل على P_i بدلالة p_i و q_i و t ، و إذا كانت الدَّالة المولِّدة F_1 لا تعتمد على الزمن بصراحة ، فإنّ المعادلة الثالثة تثبت أنّ K و H لهما نفس القيمة العددية . النوع الثاني من الدُّوال المولِّدة هو :

$$F(q, P, t) = F_2(q, P, t) - \sum_i P_i Q_i$$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} - \sum_i \dot{Q}_i P_i - \sum_i Q_i \dot{P}_i \qquad (6.21)$$

و بمساوات هذه المعادلة بالمعادلة (6.17) نحصل على :

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad K = \frac{\partial F_2}{\partial t} + H \qquad (6.22)$$

وبنفس الطريقة نحصل على النوع الثالث :

$$F = F_3(p, Q, t) + \sum_i q_i p_i$$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_3}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_i \frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_3}{\partial t} + \sum_i \dot{q}_i p_i + \sum_i q_i \dot{p}_i$$

أيضا بالمساواة مع المعادلة (6.17)

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial t} + H = k \qquad (6.23)$$

أمّا النوع الرابع فيكتب كما يلي :

$$F = \sum_i q_i p_i - \sum_i Q_i P_i + F_4(p, P, t)$$

حيث إنّ

$$\frac{dF}{dt}=\sum_i \dot{q}_i p_i+\sum_i q_i \dot{p}_i-\sum_i \dot{Q}_i P_i-\sum_i Q_i \dot{P}_i$$

$$+\sum_i \frac{\partial F_4}{\partial p_i}\dot{p}_i+\sum_i \frac{\partial F_4}{\partial P_i}\dot{P}_i+\frac{\partial F_4}{\partial t} \qquad (6.24)$$

بمساواة (6.24) مع (6.17)

$$q_i=-\frac{\partial F_4}{\partial p_i}\ ,\ Q_i=\frac{\partial F_4}{\partial P_i}\ ,\ K=H+\frac{\partial F_4}{\partial t} \qquad (6.24)$$

و حتى نفهم أهمية هذه العلاقات ندرس المثال التالي :

مثال (6.5)

إذا كانت الدالة $F_1(q,Q,t)$ ، هي دالّة مولّدة للانتقال الفيصلي ، و معطاة بالعلاقة التالية :

$$F_1(q,Q,t)=-\frac{1}{3m^2 g}\left\{2m^2 g(Q-q)\right\}^{3/2}$$

حيث (m) كتلة جسيم يسقط سقوا حراً ، و q ترمز للإحداثيات العمودية ، و g تسارع الجاذبية الأرضية ، جد الإحداثيات الجديدة لهذا الانتقال الفيصلي ؟ .

الحل :

$$p=\frac{\partial F_1}{\partial q}=\left\{2m^2 g(Q-q)\right\}^{1/2}$$

أي أنّ :

$$Q=q+\frac{p^2}{2m^2 g}$$

أيضاً :

$$P=-\frac{\partial F_1}{\partial Q}=\left\{2m^2 g(Q-q)\right\}^{1/2}$$

إذن :

$$P=p$$

$$K=H=\frac{p^2}{2m}+m g q=m g Q$$

المعادلات الفيصلية بدلالة الإحداثيات الجديدة هي :

$$\dot{Q}=\frac{\partial K}{\partial P}=0\ ,\ \dot{P}=-\frac{\partial K}{\partial Q}=-m g$$

و من السهل حل هاتين المعادلتين :

$$Q=\text{ثابت}=c_1$$

و

$$P=-m g t+c_2$$

وبالتعويض في المعادلات القديمة نحصل على :

$$q = Q - \frac{p^2}{2m^2 g} = Q - \frac{P^2}{2m^2 g}$$

$$q = c_1 - \frac{(-m g t + c_2)^2}{2m^2 g} = -\frac{1}{2} g t^2 + \alpha t + \beta$$

حيث β و α ثابتان .

$$p = P = -m g t + c_2$$

وهذا هو الحل المعروف للسقوط الحر .

6.5* التقريب المبسط للانتقالات الفيصلية
(The Symplectic Approach to Canonical Transformation)

تستخدم طريقة المصفوفات لمعرفة الانتقال ، هل هوانتقال فيصلي ؟ أو غير ذلك ؟. دعنا نُعرِّف الانتقالات التالية :

$$Q_i = Q_i(q , p) \qquad (6.26)$$

$$P_i = P_i(q , p) \qquad (6.27)$$

المشتقة الزمنية الكلية للمعادلة (6.26) تعطى بالعلاقة التالية :

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \dot{p}_j$$

و باستخدام المعادلات الفيصلية للحركة نحصل على :

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (6.28)$$

و بشكل مشابه نحصل على :

$$\dot{P}_i = \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (6.29)$$

ومن المعلوم أنّ معكوس الانتقالات (6.26) و (6.27) يحسب كمايلي :

$$q_j = q_j(Q , P) \qquad (6.30)$$

$$p_j = p_j(Q , P) \qquad (6.31)$$

دعنا الآن نحسب المشتقات التالية :

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \qquad (6.32)$$

$$\frac{\partial H}{\partial Q_i} = \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \qquad (6.33)$$

و حتى تكون الانتقالات فيصلية ، فلابدّ للإحداثيات الجديدة أن تحقق معادلات الحركة الفيصلية ، أي أنّ :

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}$$

وهذه الشروط تتحقق فقط إذا تحققت العلاقات التالية :

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial p_j}{\partial P_i} \quad (6.34)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial P_i} \quad (6.35)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_j} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \quad (6.36)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \quad (6.37)$$

هذه هي الشروط المباشرة ، حتى يكون الانتقال فيصليا ، و تسمّى الشروط المبسطة (symplectic condition) . الان سنصيغ هذه العلاقات باستخدام المصفوفات على النحو التالي :

إذا كان لدينا نظام يتكون من n درجة حرية ، يحتوي على الإحداثيات المعمّمة q_i ، و الزخم المعمّم p_i حيث $(i = 1, \ldots, n)$ ؛ إذن نستطيع تركيب المصفوفة التي تحتوي على عمود واحد (column matrix) و لنسميها η وتحتوي على $2n$ عنصر بحيث :

$$\eta_i = q_i \quad , \quad \eta_{i+n} = p_i \qquad i = (1, \ldots, n) \quad (6.38)$$

و بنفس الطريقة نعرّف المصفوفة ذات العمود الواحد $\frac{\partial H}{\partial \eta}$ التي تحتوي

بعناصر التالية :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \eta}\right)_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad \left(\frac{\partial H}{\partial \eta}\right)_{i+n} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (6.39)$$

نفرض (J) مصفوفة مربّعة $(2n \times 2n)$ تُعطى بالشكل التالي :

$$J = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & 1_{n\times n} \\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

حيث $1_{n\times n}$ مصفوفة أحادية و $0_{n\times n}$ مصفوفة صفرية ، فعلى سبيل المثال إذا كانت $n = 2$ فإنّ هذه المصفوفة تأخذ الشكل التالي :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الآن : تكتب معادلات هاميلتون للحركة بشكل ملائم ، باستخدام المصفوفات كما يلي :

$$\dot{\eta} = J\frac{\partial H}{\partial \eta} \quad (6.41)$$

وبشكلٍ صريح :

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & 1_{n\times n} \\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \eta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial \eta_{2n}} \end{bmatrix} \qquad (6.42)$$

من السهل إثبات أنّ (J) مصفوفة متعامدة :

$$J^T J = 1$$

أيضا :

$$J^2 = -1 \text{ و } J^T = -J = J^{-1}$$

لقد رمزنا للإحداثيات القديمة q_i و p_i ، بالرموز η_i و η_{n+i} ، والآن نرمز للإحداثيات الجديدة Q_i و P_i بالرموز ζ_i و ζ_{n+i} أي أنّ :

$$\zeta = \zeta(\eta)$$

إذن :

$$\dot{\zeta}_i = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j$$

و باستخدام المصفوفات تكتب هذه المشتقة الزمنية كما يلي :

$$\dot{\zeta} = M \dot{\eta}$$

حيث M مصفوفة جاكوبي للإنتقال و تحتوي على العناصر :

$$M_{ij} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j}$$

و باستخدام المعادلة (6.41) نحصل على :

$$\dot{\zeta} = MJ \frac{\partial H}{\partial \eta}$$

لكن :

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = \frac{\partial H}{\partial \zeta_j} \frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta_i} = M_{ji} \frac{\partial H}{\partial \zeta_j}$$

و باستخدام رموز المصفوفات تكتب كما يلي :

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = M^T \frac{\partial H}{\partial \zeta}$$

إذن :

$$\dot{\zeta} = MJM^T \frac{\partial H}{\partial \zeta} \qquad (6.44)$$

وحتى يكون الانتقال فيصليا ، يجب أنْ تحقِّق الإحداثيات الجديدة معادلات الحركة الفيصلية التي تكتب باستخدام المصفوفات مقارنة بالمعادلة (6.41) كما يلي :

$$\dot{\zeta} = J\frac{\partial H}{\partial \zeta} \qquad (6.45)$$

و بمساواة المعادلتين (6.44) و (6.45) نحصل على :

$$MJM^T \frac{\partial H}{\partial \zeta} = J \frac{\partial H}{\partial \zeta}$$

و بذلك يكون الانتقال فيصليا إذا حقَّق المعادلة :

$$MJM^T = J \qquad (6.46)$$

مثال (6.6)

أثبت أنّ الانتقال التالي هو انتقال فيصلي ؟

$$Q = \tan^{-1}(q/p) \;,\quad P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$$

الحل :

في البداية نحسب المصفوفة (M) التي تحتوي على العناصر :

$$M_{ij} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j}$$

هنا $i , j = 1 , 2$ بحيث :

$$\zeta_1 = Q \,,\, \zeta_2 = P \,,\, \eta_1 = q \,,\, \eta_2 = p$$

لذلك تحسب المصفوفة كما يلي :

$$M = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial q} & \dfrac{\partial Q}{\partial p} \\ \dfrac{\partial P}{\partial q} & \dfrac{\partial P}{\partial p} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1/p}{1 + (q/p)^2} & \dfrac{(-q/p^2)}{1 + (q/p)^2} \\ q & p \end{bmatrix}$$

$$M^T = \begin{bmatrix} \dfrac{1/p}{1 + (q/p)^2} & q \\ \dfrac{(-q/p^2)}{1 + (q/p)^2} & p \end{bmatrix}$$

وفي هذه الحالة تكتب المصفوفة (J) كما يلي :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث عدد درجات الحرية يساوي واحد ، وباستخدام خاصية ضرب المصفوفات نحصل على :

$$JM = \begin{bmatrix} \dfrac{q \; (-1/p)}{1+(q/p)^2} & \dfrac{p \; (q/p^2)}{1+(q/p)^2} \end{bmatrix}$$

و بنفس الطريقة نجد :

$$M^T J M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = J$$

لذلك نقول أنّ هذا الانتقال فيصلي .

مثال (6.7)

إثبت أنّ الانتقال التالي هو انتقال فيصلي ؟

$$Q_1 = q_1 \qquad P_1 = p_1 - 2p_2$$
$$Q_2 = p_2 \qquad P_2 = -2q_1 - q_2$$

الحل :

تكتب المصفوفة (M) في هذه الحالة كما يلي :

$$M = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \dfrac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \dfrac{\partial Q_1}{\partial p_2} \\ \dfrac{\partial Q_2}{\partial q_1} & \dfrac{\partial Q_2}{\partial q_2} & \dfrac{\partial Q_2}{\partial p_1} & \dfrac{\partial Q_2}{\partial p_2} \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial P_1}{\partial q_2} & \dfrac{\partial P_1}{\partial p_1} & \dfrac{\partial P_1}{\partial p_2} \\ \dfrac{\partial P_2}{\partial q_1} & \dfrac{\partial P_2}{\partial q_2} & \dfrac{\partial P_2}{\partial p_1} & \dfrac{\partial P_2}{\partial p_2} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

و بما أنّ النظام يحتوي على درجتي حرية ، لذلك تُكتب المصفوفة (J) كما يلي :

$$J = \begin{bmatrix} 0_{2\times 2} & 1_{2\times 2} \\ -1_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$JM^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أيضا :

$$MJM^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = J$$

إذن الانتقال فيصلي .

6.6 * أقواس بويسون و الانتقالات الفيصلية
(Poisson Bracket and Canonical Transformation)

لقد عرّفنا في فقرات سابقة أقواس بويسون ، وهنا نودُّ أنْ نكتب هذا التعريف بدلالة المصفوفات ، لاستخدام هذه الأقواس في دراسة الانتقالات الفيصلية . يمكن كتابة تعريف قوس بويسون (6.5) باستخدام المصفوفات كما يلي :

$$\{f , g\}_\eta = \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^T J \frac{\partial g}{\partial \eta} \tag{6.47}$$

لكن أقواس بويسون الأساسية :

$$\{q_j , q_k\}_{q,p} = 0 = \{p_j , p_k\}_{q,p}$$

$$\{q_j , p_k\}_{q,p} = \delta_{jk} = -\{p_j , q_k\}_{q,p}$$

يمكن أن تُكتب على شكل مصفوفة كما يلي :

$$\{\eta , \eta\}_\eta = J \tag{6.48}$$

لكنّنا رمزنا للإحداثيات الجديدة بالرمز ζ

$$\zeta \equiv \zeta(\eta) \tag{6.49}$$

و باستخدام العلاقة (6.47) يتبين أنّ :

$$\{\zeta , \zeta\}_\eta = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)^T J \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = M^T JM \tag{6.50}$$

حيث :

$$M = \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$$

وحتى يكون الانتقال فيصلياً ، يجب أن تتحقّق العلاقة (6.46) أي أنّ :

$$M^T JM = J$$

وهذه النتيجة توصلنا إلى الشرط التالي : وهو إذا تحققت العلاقة

$$\{\zeta , \zeta\}_\eta = J \qquad (6.51)$$

فإنّ الانتقال يكون انتقالاً فيصلياً ، و بهذا نكون قد أوجدنا طريقةً ثانيةً للتحقق من الانتقالات إذا كانت فيصلية أو غير ذلك .

نستطيع كتابة العلاقة (6.51) بصيغ أخرى كما سيأتي :

إذا كانت الإحداثيات الجديدة تحقق العلاقات التالية :

$$\{Q , Q\}_{q,p} = \{P , P\}_{q,p} = 0$$

$$\{Q , P\}_{q,p} = 1 = -\{P , Q\}_{q,p}$$

فإنّ الانتقال يكون فيصليا .

مثال (6.8)

استخدم أقواس بويسون لتثبت أنّ الانتقال التالي هو انتقال فيصلي ؟.

$$Q = \tan^{-1}(q/p) \qquad P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$$

الحل :

إذا تحققت العلاقة (6.51) لهذا الانتقال ، فإنّه فيصلي :

$$\{\zeta , \zeta\}_\eta \equiv \begin{bmatrix} \{Q , Q\}_{q,p} & \{Q , P\}_{q,p} \\ \{P , Q\}_{q,p} & \{P , P\}_{q,p} \end{bmatrix}$$

و نحسب أقواس بويسون كما يلي :

$$\{Q , Q\}_{q,p} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} = 0$$

$$\{Q , P\}_{q,p} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1 = -\{P , Q\}_{q,p}$$

$$\{P , P\}_{q,p} = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 0$$

إذن :

$$\{\zeta , \zeta\}_\eta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = J$$

وهذا يعني أنّ الانتقال فيصلي .

مثال (6.9)

أثبت أنّ الانتقال :

$$Q_1 = q_1^2 \qquad Q_2 = q_2 \sec p_2$$

$$P_1 = \frac{p_1 \cos p_2 - 2q_2}{2q_1 \cos p_2} \qquad P_2 = \sin p_2 - 2q_1$$

فيصلي باستخدام أي طريقة تختارها ، و جد الدّالة المولّدة المناسبة المؤدية لهذا الانتقال ؟ .

الحل :

سوف نترك إثبات أنّ الانتقال فيصلي للقارئ ، و نهتم هنا بإيجاد الدّالة المولّدة من النوع الثالث $F_3\,(p\,,Q)$

$$q_1 = \sqrt{Q_1} \qquad\qquad q_2 = \frac{Q_2}{\sec p_2} = Q_2 \cos p_2$$

$$P_1 = \frac{p_1 \cos p_2 - 2Q_2 \cos p_2}{2\sqrt{Q_1}\,\cos p_2} = \frac{p_1 - 2Q_2}{2\sqrt{Q_1}}$$

$$P_2 = \sin p_2 - 2\sqrt{Q_1}$$

و بهذا نكون قد حصلنا على : q_1 و q_2 و P_1 و P_2 ، بدلالة Q_1 و Q_2 و p_1 و p_2 ، و باستخدام المعادلات : (6.23) نحصل على المعادلات التالية :

المعادلة الأولى :

$$q_1 = -\frac{\partial F_3}{\partial p_1} = \sqrt{Q_1}$$

المعادلة الثانية :

$$q_2 = -\frac{\partial F_3}{\partial p_2} = Q_2 \cos p_2$$

المعادلة الثالثة :

$$P_1 = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_1} = \frac{p_1 - 2Q_2}{2\sqrt{Q_1}}$$

المعادلة الرابعة :

$$P_2 = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_2} = \sin p_2 - 2\sqrt{Q_1}$$

من المعادلة الأولى نجد :

$$F_3(p_1\,,\ p_2\,,Q_1\,.\ Q_2) = -\sqrt{Q_1}\ p_1 + f(\ p_2\,,Q_1\,,\ Q_2\ )$$

بالتعويض في المعادلة الثانية نجد :

$$-\frac{\partial f}{\partial p_2} = Q_2 \cos p_2$$

بإجراء التكامل نحصل على :

$$f = -Q_2 \sin p_2 + g\left(Q_1\,,\ Q_2\right)$$

إذن :

$$F_3 = -\sqrt{Q_1}\ p_1 - Q_2 \sin p_2 + g(\ Q_1,\ Q_2\ )$$

و بتعويض هذه النتيجة في المعادلة الثالثة نحصل على :

$$\frac{p_1}{2\sqrt{Q_1}} - \frac{\partial g}{\partial Q_1} = \frac{p_1 - 2Q_2}{2\sqrt{Q_1}}$$

إذن :

$$\frac{\partial g}{\partial Q_1} = \frac{Q_2}{\sqrt{Q_1}}$$

و منها نحصل على :

$$g = 2Q_2\sqrt{Q_1} + h(Q_2)$$

و بتعويض قيمة g نحصل على :

$$F_3 = -\sqrt{Q_1}\ p_1 - Q_2 \sin p_2 + 2\,Q_2\sqrt{Q_1} + h(Q_2)$$

باستخدام المعادلة الرابعة نجد أنّ :

$$\sin p_2 - 2\sqrt{Q_1}\ -\frac{\partial h}{\partial Q_2} = \sin p_2 - 2\sqrt{Q_1}$$

$$-\frac{\partial h}{\partial Q_2} = 0$$

أي أنّ :

$$h\left(Q_2\right) = \text{ثابت}$$

و الآن نحصل على الدّالة المولدة لهذا الانتقال :

$$F_3 = -\sqrt{Q_1}\ p_1 - Q_2 \sin p_2 + 2\ Q_2\sqrt{Q_1} + \text{ثابت}$$

مثال (6.10)

جد الشروط التي تجعل الانتقال التالي انتقالاً فيصلياً ؟.

$$Q = \alpha\ \frac{p}{x} \quad , \quad P = \beta\, x^2$$

حيث β و α ثابتان .

الحل :

مستخدما أقواس بويسون :

$$\{Q\,,\ Q\} = \{P\,, P\} = 0$$

$$\left\{Q\,, P\right\} = \alpha\beta\left\{\frac{p}{x}\,, x^2\right\} = \alpha\beta\left\{p\,, x\right\} = -2\,\alpha\beta$$

وهذه القيمة يجب أن تساوي واحد ، أي أنّ :

$$-2\,\alpha\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{-1}{2\,\alpha}$$

6.7* متسلسلة تيلر ، و إيجاد الحلول العامّة لمعادلة الحركة باستخدام أقواس بويسون .

Taylor series and getting the general solutions for the equations of motion using Poisson Bracket relations

لقد عرفنا مما سبق ، أنّ معادلات الحركة يمكن أن تكتب بدلالة أقواس بويسون كما يلي :

$$\dot{q}_i = \{q_i , H\} \tag{6.52}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i , H\} \tag{6.53}$$

هذه المعادلات ، هي معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى (first order) ، يمكن حلّها للحصول على q_i و p_i بدلالة الزمن t ، لكن هناك طريقة أخرى لإيجاد هذه الحلول ، و ذلك باستخدام متسلسلة تيلر عند شروط ابتدائية كما سيتضح :

$$u(t) = u_0 + t\,\frac{du}{dt}\bigg|_0 + \frac{t^2}{2!}\,\frac{d^2u}{dt^2}\bigg|_0 + \frac{t^3}{3!}\,\frac{d^3u}{dt^3}\bigg|_0 + \ldots \tag{6.54}$$

لكن المشتقة الأولى تعطى بالعلاقة التالية :

$$\frac{du}{dt} = \{u , H\}$$

إذن تكتب المشتقة الثانية و الثالثة على الترتيب كما يلي :

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d}{dt}\{u , H\} = \{\{u , H\} , H\}$$

$$\frac{d^3u}{dt^3} = \frac{d}{dt}\{\{u , H\} , H\} = \{\{\{u , H\} , H\} , H\}$$

و بالتعويض في المعادلة (6.54) نحصل على :

$$u(t) = u_0 + t\{u , H\}_0 + \frac{t^2}{2!}\{\{u , H\} , H\}_0 + \frac{t^3}{3!}\{\{\{u , H\} , H\} , H\}_0 + \ldots \tag{6.55}$$

و إشارة الصفر ، تعني حساب أقواس بويسون عند النقطة الابتدائية $t = 0$.

مثال (6.11)

جسيم كتلته m يتحرك في خط مستقيم بتسارع ثابت a ، دالة هاميلتون له :

$$H = \frac{p^2}{2m} - m\,a\,x$$

جد الأزاحة x(t) مستخدماً متسلسلة تيلر ؟ .

الحل :

معتمداً على العلاقة (6.55)

$$x(t) = x_0 + t\{x , H\}_0 + \frac{t^2}{2!}\{\{x , H\} , H\}_0 + \frac{t^3}{3!}\{\{\{x , H\} , H\} , H\}_0 + \ldots$$

بما أنّ :

$$\{x , H\} = \left\{x , \frac{p^2}{2m} - m\,a\,x\right\} = \frac{p}{m} \;,\; \{x , H\}_0 = \frac{p_0}{m}$$

$$\{\{x , H\} , H\} = \left\{\frac{p}{m} , \frac{p^2}{2m} - m\,a\,x\right\} = +a \;,\; \{\{x , H\} , H\}_0 = a$$

$$\{\{\{x , H\} , H\} , H\} = \{a , H\} = 0$$

تكون بقية الحدود تساوي صفراً ، فنحصل على :

$$x(t) = x_0 + \frac{p_0}{m} t + \frac{1}{2} a t^2 + 0 + 0 \; . \; . \; . \; . \; .$$

و نحن نعرف أنّ : $\frac{p_0}{m} = v_0$ لهذا

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

و هذا هو الحل المعروف لهذه المسألة .

**************xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx**************

مسائل عامّة و حلول جزئية

1) احسب أقواس بويسون التالية :

$$\{L_x , L_y\} \quad , \quad \{L_y , L_z\} \quad , \quad \{L_z , L_x\}$$

الحل الجزئي :

$$\{L_x , L_y\} = \{ yp_z - z p_y \; , zp_x - xp_z \} = L_z$$

$$\{L_y , L_z\} = L_x$$

$$\{L_z , L_x\} = L_y$$

2) اثبت أنّ الانتقالات التالية هي انتقالات فيصلية ؟ .

$$Q_1 = \frac{q_1}{\sqrt{2}} - \frac{p_1}{\sqrt{2}} \qquad , \qquad P_1 = \frac{q_1}{\sqrt{2}} + \frac{p_1}{\sqrt{2}}$$

$$Q_2 = \frac{q_2}{\sqrt{2}} - \frac{p_2}{\sqrt{2}} \qquad , \qquad P_2 = \frac{q_2}{\sqrt{2}} + \frac{p_2}{\sqrt{2}}$$

الحل الجزئي :

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad , \quad M^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن :

$$M J M^T = J$$

3) اثبت أنّ الانتقالات التالية هي انتقالات فيصلية :

$$Q_1 = q_1 + \varepsilon \qquad , \qquad P_1 = p_1$$

$$Q_2 = q_2 + \varepsilon \quad , \quad P_2 = p_2$$

$$Q_3 = q_3 + \varepsilon \quad , \quad P_3 = p_3$$

حيث ε مقياس صغير جداً ؟ .

الحل الجزئي :

$$\{Q_i , Q_j\} = \{P_i , P_j\} = 0 , \qquad \{Q_i , P_j\} = \delta_{ij} \quad , i , j = 1 , 2 , 3$$

4) احسب $\{A_1 , A_2\}$ ، حيث :

$$A_1 = \frac{1}{4}\left(x^2 + P_x^2 - y^2 - P_y^2\right)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(x\,y + P_x\ P_y\right)$$

الحل الجزئي :

$$\{A_1 , A_2\} = \frac{1}{2}\left(x\,p_y - p_x y\right) = \frac{1}{2}\ L_z$$

5) داله هاميلتون لنظام معين تعطى بالمعادلة التالية :

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2} + p^2\,q^4\right)$$

أ – استخدم طريقة بويسون لإثبات أنّ

$$F = \frac{1}{2}p^2\ q^4 + \frac{1}{2q^2} + c$$

هو ثابت حركه ؟ .

ب – جد الانتقال الفيصلي الذي يحول دالة هاميلتون المعطاه في هذه المسألة الى دالة هاميلتون في حالة الهزّاز التوافقي ؟ .

ج – بإستخدام الشرط المبسط (Symplectic Condition) اثبت أنّ الانتقال التالي هو فيصلي؟

$$Q = \frac{q}{\sqrt{2}} - \frac{p}{\sqrt{2}}$$

$$P = \frac{q}{\sqrt{2}} + \frac{p}{\sqrt{2}}$$

الحل الجزئي :

أ–
$$\frac{dF}{dt} = \{F , H\} = 0$$

ب –
$$Q = \frac{-1}{q} \ , \ P = p\,q^2$$

$$H(Q, P) = \frac{1}{2}\ \left(Q^2 + P^2\right)$$

ج - $M^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ، $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $M J M^T = J$

6) دالة لاجرانج لمذبذب توافقي أحادي البعد تُكتب على الصورة

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

جد :

أ - دالة هاميلتون و معادلات الحركة باستخدام أقواس بويسن ،

ب - الإزاحة $x(t)$ مستخدما متسلسلة تايلور و أقواس بويسن ؟ .

الحل الجزئي :

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\dot{x} = \{x , H\} = \frac{p_x}{m}$$

$$\dot{p}_x = \{p_x , H\} = - kx$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{p_{x_0}}{\sqrt{mk}} \sin \omega t$$

حيث :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

7) اثبت أنّ التحويلات التالية تكون فيصلية :

أ - $P = \ln \sin p \ , Q = q \tan p$

ب - $P = p q^2 \ , Q = - \frac{1}{q}$

الحل الجزئي :

$$\{Q , P\} = 1$$
$$\{Q , Q\} = \{P , P\} = 0$$

****

قائمة بالمصطلحات العلمية الواردة في الكتاب

عربي	English
ميكانيكا نيوتن	Newtonian mechanics
قانون نيوتن الأول	Newton's first law
نظم محاور الإسناد القاصرة	Inertial reference system
كتلة	Mass
قوة	Force
الزخم الخطي (كمية التحرك)	Linear momentum
جسيم	Particle
قوة ثابتة	Constant force
الحركة المستقيمة	One - dimentional motion
الحركة الخطية	Rectilinear motion
التسارع المنتظم	Uniform acceleration
معامل الإحتكاك الحركي	Coefficient of kinetic friction
معامل الإحتكاك السكوني	Coefficient of static friction
موضع (موقع)	Position
قاعدة السلسلة	Chain rule
مبرهنة الشغل الطاقة	Work energy theorem
طاقة الوضع	Potential energy
التدرج	Gradient
الجاذبية	Gravity
نقاط الرجوع	Turning Points
القوى الدفعية	Impulsive forces
السرعة الحديّة	Terminal velocity
الموقع النهائي	Terminal Position
الحركة الإهتزازية	Oscillatory motion
الحركة التوافقية البسيطة	Simple harmonic motion
سعة الإهتزازة	Amplitude
زاوية الطور	Phase angle

angular frequency	التردد الزاوي
Period	الزمن الدوري
Frequency	تردد
General Solution	الحل العام
Hooke's Law	قانون هوك
Restoring force	قوة الإرجاع
Superposition Principle	مبدأ التراكب
External force	القوة الخارجية
Equation	معادلة
Generalized coordinates	الإحداثيات المعممة
Degrees of freedom	درجات الحرية
Cartesian coordinates	الإحداثيات المتعامدة
Cylindrical coordinates	الإحداثيات الإسطوانية
Spherical coordinates	الإحداثيات الكروية
Generalized velocity	السرعة المعممة
Generalized force	القوة المعممة
Transformation	التحويل (الإنتقال)
Conservative system	النظام المحافظ
Constraind system	النظام المقيد
Holonomic constraints	قيود تامة التقييد
Rigid bodies	الأجسام الجاسئة
Non-holonomic constraints	قيود غير تامة التقييد
Lagrange multipliers	مضاعفات لاجرانج
Generalized momenta	الزخم المعمم
Cyclic coordinates	الإحداثيات الدورية
Conservation Laws	قوانين الحفظ
Closed system	النظام المغلق
Conservation of energy	حفظ الطاقة
Hamiltonian function	دالة هاميلتون
Explicit	صراحة
Canonical equations of motion	معادلات الحركة الفيصلية (القانونية)
Electromagnetic force	القوة الكهرومغناطيسية
Velocity	السرعة المتجهة

Potential energy	طاقة الوضع
Lorentz force	قوة لورنتز
Gaussian units	وحدات جاوس
Magnetic vector potintial	الجهد المغناطيسي المتجهي
Calculus of variations	حسبان التغاير
Certain techniques	بعض الأساليب التقنية
Stationary value	قيمة قصوى
Euler equation	معادلة أويلر
Element of arc length	عنصر الطول القوسي
Several dependent variables	المتغيرات متعددة التوابع
Hamilton's principle	مبدأ هاميلتون
Geodesics	الجيوديسية
Parabola	قطع زائد
Small oscillations	الإهتزازات الصغيرة
Equilibrium	إتزان
stable equilibrium	إتزان مستقر
Unstable equilibrium	إتزان غير مستقر
symmetric matrix	مصفوفة متناظرة
N-degree polynomial	كثير الحدود من الدرجة N
Eigenvectors	المتجهات المميزة
Orthogonal set	مجموعة تعامد
Orthonormal set	مجموعة تعامد قياسي
Normalized set	مجموعة قياسية
Normalized condition	شرط التقييس
Normal coordinates	الإحداثيات الطبيعية
Orthonormality condition	شرط التعامد القياسي
Diagonal matrix	مصفوفة قطرية
Identity matrix	مصفوفة الوحدة
Orthogonal matrix	مصفوفة متعامدة
Canonical transformations	الإنتقالات الفيصلية
Poisson brackets	أقواس بويسون
Antisymmetry	عدم التماثل
Product rule	قاعدة الضرب

Jacobi's identity	محددة جاكوبي
Fundamental brackets	الأقواس الأساسية
Generating functions	الدّوال المولّدة
Symplectic approach	التقريب المبسط
Symplectic condition	الشرط المبسط
Column matrix	مصفوفة تحتوي علي عمود واحد
Taylor series	متسلسة تايلور
First order	الرتبة الأولى

المراجع

1- Keith R. Symon ," Mechanics " 3rd ed. Addison - Wesley Publishing cob., (1980) .

2- Edward A . Desloge," Classical Mechanics " , Volume 1 , John Wiley & sons, (1982) .

3- R . a . Becker , " Introduction to Theoretical Mechanics " , New York : Mc Graw - Hill , (1954) .

4- H . Goldstein , " Classical Mechanics " , 2nd ed. , Addison Wesley , (1980)

5- Dare A . Wells , " Lagrangian Dynamics " , New York Mc Graw - Hill , (1967) .

6- Atam p . Arya , " Introduction to Classical Mechanics " , Allyn and Bacon , (1990) .

7- E . F . Taylor , " Introductory Mechanics" , New York , : John Wiley & sons, (1963) .

8- E . N . Moore , " Theoretical Mechanics" , New York , : John Wiley & sons, (1983) .

9- Grant R . Fowles and George L. cassiday , " Analytical Mechanics" 5th ed . , Saunders Golden Sunburst series ,(1993)

10- Jerry B . Marion , " Classical Dynamics of Particles and Systems " 2nd ed. , Academic press . (1970) .

